Réductibilité et théorie de Floquet pour des systèmes différenciels non linéaires

Jihed Ben Slimene

Université Paris 1 Sorbonne-Panthéon
Laboratoire SAMM EA 4543

Thèse

présentée en première version en vue d'obtenir le grade de Docteur, spécialité « Mathématiques »

par

BEN SLIMENE Jihed

Réductibilité et Théorie de Floquet pour des Systèmes Différentiels non Linéaires

Thèse soutenue le 25 Mars 2013 devant le jury composé de :

M.	Jean-Pierre Françoise	Université Paris 6	(Rapporteur)
M.	Khalil Ezzinbi	Faculté des Sciences Semlalia	(Rapporteur)
M.	Joël Blot	Université paris1	(Directeur)
M.	Jean-Bernard Baillon	Université paris1	(Examinateur)
M.	Alain Haraux	Université paris 6	(Président)
M.	Mamadou Mboup	Université de Reims	(Examinateur)
Mme.	Geneviève Raugel	Université de Paris-Sud	(Examinateur)

À mes parents…

Remerciements

Voici enfin une page sans mathématiques. L'occasion de remercier et de saluer ceux qui ont aidé au bon déroulement de ce travail, par leur réflexion, leurs remarques, ou juste leur présence.

J'adresse d'abord toute ma gratitude au Professeur Joël BLOT, mon directeur de thèse, pour m'avoir ouvert au monde de la recherche, par ses hautes compétences, son encadrement exceptionnel en toute circonstance et son aiguillage au quotidien dans un cadre idéal et un milieu propice où j'ai pu m'exprimer de la plus belle des manières.

Mes remerciements vont aussi à Madame la Professeur Marie COTTRELL et Monsieur le Professeur Jean-Mark BARDET directeur du laboratoire SAMM, pour leur accueil au sein de son équipe durant ces années de thèse et pour leur éternel soutien à tous les thésards.

Je tiens à remercier particulièrement M. Jean-Pierre LECA qui a toujours été de bon conseils, et pour ses qualités humaines et scientifiques

Je souhaite exprimer toute ma gratitude aux rapporteurs de ma thèse Jean-Piere FRANÇOISE et Khalil EZZINBI qui ont bien voulu consacrer à ma thèse une partie de leur temps. Je remercie chaleureusement Jean-Bernard BAILLON, Alain HARAUX, Mamadou MBOUP et Geneviève Raugel pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de participer au jury de thèse.

Mes sincères remerciments vont à tous les membres du laboratoire SAMM, doctorants, chargés de cours et professeurs, qui sont à la source d'une bonne ambiance de travail et qui ont réussit à concilier rigueur intellectuelle et détente.

Enfin, les mots ne sauraient remercier les membres de ma famille pour tout ce qu'ils font pour ma réussite, en particuliers mes parents qui m'ont toujours soutenu.

Paris, le 25 mars 2013.

Table des matières

Préface

0

0.0.1 Contexte général

Les fonctions presque-périodiques (en abrégé : p.p.) ou multi-fréquentielles, apparaissent naturellement dès qu'on est en présence de plusieurs mouvements périodiques simultanés (par exemple deux ressorts d'élasticités différentes accrochés à deux masses différentes). Elles ne sont pas des fonctions qui sont presque des fonctions périodiques, mais sont des fonctions qui possédent de nombreuses presque-périodes. L'une des propriétés importantes des fonctions p.p. est d'admettre un développement en série de Fourier généralisée :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\lambda_n} e^{i\lambda_n t}.$$

La notion est issue, au début du vingtième siécle, des travaux de Esclangon, Bohl, Bohr, Besicovitch, Bochner, Stepanov.... Des contributions importantes sont dues à von Neumann, Fréchet,... Une théorie générale des oscillations passera forcément par les oscillations p.p.. Sur les solutions p.p. des équations différentielles ordinaires, un travail initiateur est celui de Jean Favard dans les années 1920 (cf. (1)). Une synthèse importante est un livre de A. M. Fink dans les années 1970 (cf. (2)). Ces travaux concernent surtout les systèmes dissipatifs. Sur les systèmes hamiltonniens ou lagrangiens, dans le cas autonome, les solutions p.p. sont surtout étudiées à travers les tores invariants notamment par la célèbre théorie de Kolmogorov-Arnold-Moser (K.A.M.).

Parmi la classe des fonction presque-périodiques, on trouve les fonctions quasi-périodiques (q.p.). Les fonction q.p. ont une réprésentation

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{i\omega.kt},$$

où $\omega.k = \sum_{j=1}^{n} \omega_j k_j$.

En mécanique, des phénomènes quasi-périodiques apparaissent naturellement quand on couple deux ou plusieurs systèmes qui ont des mouvements de périodes différentes. Même en absence de résonance exacte, ce couplage, si faible soit-il, peut créer des effets importants à long terme. En témoigne par exemple les travaux classiques de Laplace et d'autres en mécanique céleste.

L'étude mathématique des mouvements quasi-périodiques des systèmes dynamiques commence essentiellement avec Esclangon (1905). Elle pose des problèmes bien plus délicats que celle des mouvements périodiques. Ces problèmes ont motivé la création d'une théorie des fonctions presque-périodiques et plusieurs voies de recherche sur elles.

Cette thèse traite de quelques aspects du problème de réductibilité pour des équations linéaires avec des coefficients presque-périodiques ou quasi-périodiques.

Le concept de réductibilité des équations différentielles linéaires est tout d'abord considéré par Lyapunov (cf. (5)). Plusieurs auteurs ont traité ce problème (cf. (6), (7), (8)......).

Parmi les théories de la réductibilité, on trouve la théorie de Floquet pour les équations différentielles linéaires périodiques qui répresente un outil fondamental pour l'étude de phénomènes tant linéaires que non linéaires résultant des équations différentielles. Cette théorie consiste à reduire le système non autonome $x'(t) = A(t)x(t)$ en un système autonome $y'(t) = \Omega y(t)$, où Ω est une matrice constante.

Cette théorie est bien comprise et classique pour les équations linéaires périodiques (cf. (3), (4)). Une extension naturelle donc doit considérer le cas dans lequel la matrice A(t) dépend du temps d'une manière quasi-périodique ou presque-périodique.

Ce travail traite de la réductibilité des équations différentielles ordinaires linéaires q.p. et p.p. pour obtenir des résultats sur les solutions q.p. et p.p. des équations différentielles ordinaires non linéaires.

0.0.2 Résumé de la thèse

Le premier chapitre a pour objectif de donner une collection de résultats sur les fonctions p.p. qui seront utilisés dans la thèse. On débute ce chapitre par les fonctions p.p. au sens de Harald Bohr, puis on aborde les fonctions p.p. uniformément par rapport à un paramètre, ensuite on parle des fonctions q.p. (quasi-périodiques) et des fonctions q.p avec paramètre. Enfin on expose un résultat de continuité et de différentiabilité de l'opérateur de Nemytskii.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons des résultats d'existence et d'unicité de solutions quasi-périodiques des équations différentielles ordinaires non linéaires des classes suivantes :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t)) \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(t, x(t), u(t)) \tag{2}$$

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)) \tag{3}$$

où A est une matrice quasi-périodique, u est une fonction quasi-périodique (terme de forcing ou terme de contrôle), f et g sont des fonctions quasi-périodiques par rapport à t.

Pour traiter ces problèmes on utilise les propriétés de l'équation différentielle ordinaire linéaire forcée suivante

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{4}$$

où b est une fonction quasi-périodique. Pour étudier l'équation (4) on utilise la théorie de Floquet pour les équations différentielles quasi-périodiques due à Zhensheng LIN (9), (10), (11), et des outils d'Analyse Fonctionnelle Non Linéaire.

Dans un premier temps, on utilise une théorie de Floquet due à Zhensheng Lin, qui consiste à transformer une équation différentielle ordinaire linéaire quasi-périodique en une équation différentielle ordinaire linéaire autonome (i.e. à coefficients constants). Ainsi, sous les conditions suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Il existe } K(\omega) \in]0,\infty[\text{ telle que, pour tout } (l_1,...,l_N) \in \mathbb{Z}^N_*, \\ |\sum_{j=1}^N l_j\omega_j| \geq K(\omega)(\sum_{j=1}^N |l_j|)^{-(N+1)}. \end{array}\right\} \tag{5}$$

et

$$\left.\begin{array}{l} \left| i\sum_{j=1}^N k_j\omega_j + \sum_{s=1}^N m_s\beta_s \right| \geq K(\omega,\beta)(1+\|k\|)^{N+1}, \\ \text{où } k = (k_1,\cdots,k_N) \in \mathbb{Z}^N, m = (m_1,\cdots,m_n) \in \mathbb{Z}^n \text{ t.q.} \\ \left|\sum_{s=1}^N m_s\right| \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{s=1}^N |m_s| \leq 2, \end{array}\right\} \tag{6}$$

$K(\omega,\beta)$ est une constante strictement positive et $\beta = (\beta_1,\cdots,\beta_n)$ est la liste des exposants caractéristiques de Floquet (en abrégé FL-CER) , on établit un résultat de réductibilité qui est l'objet du théorème suivant.

Théorème 0.1 *Soit $A \in QP^0_\omega(\mathbb{M}(n,\mathbb{R}))$ de classe C^τ tel que ω satisfait* (5) *et les* FL-CER *$\beta_1,\cdots,\beta_n$ de A satisfont* (6) *et soit $b \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$. Alors le système*

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{7}$$

est réductible, c'est-à-dire, il existe une transformation linéaire quasi-périodique en temps qui transforme (7) *en un système linéaire à coefficients constants.*

$$y'(t) = \Omega y(t) + e(t),$$

où $\Omega \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ est constante et $e \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$. De plus, les valeurs propres de A sont exactement les FL-CER *de A.*

($QP^k_\omega(\mathbb{E})$ répresente l'espace des fonctions q.p. qui seront définies présisément page 8 et les FL-CER de A sont définis page 25).

Ensuite, on démontre un résultat d'existence de solutions quasi-périodiques dans le cas non linéaire. Les techniques utilisées sont le théorème de Zhensheng Lin et le théorème de point fixe de Picard-Banach.

Théorème 0.2 *Soit $A \in QP^0_\omega(M(n,\mathbb{R}))$ de classe C^τ et $f \in QPU_\omega(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. On suppose que (5), (6) sont satisfaites, les* FL-CER *$\beta_1,\cdots,\beta_n$ de A sont tous non nuls et que aussi f remplit la condition suivante :*

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Il existe } c \in]0,(\|A\|\gamma+1+\gamma)^{-1}[\textit{ tel que} \\ \|f(t,x)-f(t,y)\| \leq c\|x-y\| \\ \textit{pour tout } t\in\mathbb{R} \textit{ et pour tout } x,y\in\mathbb{R}^n. \end{array}\right.$$

où γ est la constante de Bohr-Neugebauer de A. Alors l'équation

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t,x(t))$$

possède une unique solution dans $QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)$.

($QPU_\omega(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions quasi-périodiques à paramètre qui seront définies page 9 et la constante de Bohr-Neugebauer est définie page 37).

Dans une autre étape, on établit l'existence de solutions quasi-périodiques de l'équation (2) et un résultat de dépendance continue par rapport à la fonction paramètre u. Les techniques utilisées sont similaires à celles du résultat précédent.

Théorème 0.3 *Soit $A \in QP^0_\omega(M(n,\mathbb{R}))$ satisfaisant les mêmes conditions que dans le théorème précédent. Soit $g \in QPU_\omega(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n)$ et γ la constante de Bohr-Neugebauer. On suppose aussi que la condition suivante est satisfaite :*

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Il existe } d \in (0,(\|A\|_\infty\gamma+1+\gamma)^{-1}) \\ \textit{telle que } \|g(t,x,u)-g(t,y,u)\| \leq d.\|x-y\| \\ \textit{pour tout } t\in\mathbb{R}, \textit{ pour tout } x,y\in\mathbb{R}^n \textit{ et pour tout } u\in\mathbb{R}^p. \end{array}\right.$$

Alors, pour tout $u \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^p)$ il existe une unique solution $\mathfrak{X}[u] \in QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)$ de (2), et de plus l'application $u \mapsto \mathfrak{X}[u]$ est continue de $QP^0_\omega(\mathbb{R}^p)$ dans $QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)$.

Enfin, dans ce chapitre on établit un résultat de perturbation différentiable, qui porte sur l'existence et l'unicté de solution quasi-périodique de (3), quand g vérifie la condition suivante :

$$\left.\begin{array}{l} g \in QPU_\omega(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n)\cap C^{\tau-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n), \\ D_xg \in QPU_\omega(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,M_n(\mathbb{R}))\cap C^\tau(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,M_n(\mathbb{R})) \\ \text{où } \tau = 2(N+1)(\frac{n(n+1)}{2}+1), \text{ et} \\ D_ug \in QPU_\omega(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,M_{n,p}(\mathbb{R})). \end{array}\right\} \quad (8)$$

(D_xg et D_ug désignent des différentielles partielles de g).

En utilisant toujours la théorie de Floquet et des outils d'Analyse Fonctionnelle Non Linéaire, on établit le résultat suivant.

Théorème 0.4 *Soit* $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction qui satisfait* (8) *où* ω *satisfait* (5). *Soit* $u_* \in QP^{\tau}_{\omega}(\mathbb{R}^p)$ *et soit* $x_* \in QP^1_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ *une solution de* (3) *où* $u = u_*$.
On pose $J(t) = D_x g(t, x_*(t), u_*(t))$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et on note par* $\beta_1, ..., \beta_n$ *les* FL-CER *de* J. *De plus on suppose que les* β_j *satisfont* (6) *et que*

$$\text{pour tout } j = 1, ..., n, \quad \beta_j \text{ est non nul.}$$

Alors il existe $r \in]0, \infty[$ *tel que, pour tout* $u \in QP^0_{\omega}(\mathbb{R}^p)$ *qui satisfait* $\|u - u_*\|_\infty < r$, *il existe* $\mathfrak{X}[u] \in QP^1_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ *qui est une solution de* (3).

De plus l'opérateur non linéaire $u \mapsto \mathfrak{X}[u]$ *est de classe* C^1 *de* $\{u \in QP^0_{\omega}(\mathbb{R}^p) : \|u - u*\|_\infty < r\}$ *dans* $QP^1_{\omega}(\mathbb{R}^n)$, *et il existe un voisinage* $\mathcal{N}$ *de* x_* *dans* $QP^1_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ *tel que* $\mathfrak{X}[u]$ *est l'unique solution de* (3) *dans* $QP^1_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ *qui appartient à* $\mathcal{N}$.

Un troisième chapitre est consacré à l'étude de la réductibilité d'un système linéaire presque-périodique en un système linéaire triangulaire supérieur presque-périodique. Un premier résultat de réductibilité est donné par :

Théorème 0.5 *Soit* $A \in AP^0(\mathbb{M}(n, \mathbb{R}); M)$ *telle que toute les solutions de l'équation*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \tag{9}$$

sont presque-périodiques. Alors il existe $Q \in AP^1(\mathbb{M}(n, \mathbb{R}); M)$ *orthogonale et* $B = (b_{jk})_{1 \leq j,k \leq n} \in AP^0(\mathbb{M}(n, \mathbb{R}); M)$ *triangulaire supérieure telles que*

(*i*) *Sous la transformation* $y(t) = Q^{-1}(t)x(t)$ *l'équation* (9) *est équivalente à*

$$\dot{y}(t) = B(t)y(t) \tag{10}$$

.

(*ii*) *Pour tout* $k = 1, ..., n$, $t \mapsto \int_0^t b_{kk}(s)\, ds \in AP^1(\mathbb{R}^n; M)$.

($AP^k(\mathbb{E}; M)$ est l'espace des fonctions presque-périodiques d'ordre k qui seront définies dans les pages 2, 4 et 5)

On établit aussi un second résultat de réductibilité d'un système linéaire en un système linéaire triangulaire supérieur avec conservation du nombre des solutions presque-périodiques linéairement indépendantes.

Théorème 0.6 *Soit* $A \in AP^0(\mathbb{M}(n, \mathbb{R}); M)$ *telle que l'équation* (9) *possède* k *solutions presque-périodiques linéairement indépendantes dans* $AP^1(\mathbb{R}^n; M)$. *Alors il existe* $Q \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{M}(n, \mathbb{R}))$ *orthogonale,* $B \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{M}(n, \mathbb{R}))$ *triangulaire supérieure telles que :*

(*i*) *Si* x *est une solution de* (9) *alors* y, *définie par* $y(t) = Q^{-1}(t)x(t)$, *est une solution de* (10) *et inversement si* y *est une solution de* (10) *alors* x, *définie par* $x(t) = Q(t)y(t)$, *est une solution de* (9).

(ii) *Si* $Q(t) = col(v_1(t), \cdots, v_n(t))$ *alors* $v_1, \cdots, v_k \in AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n; M)$.

(iii) *L'équation* (10) *possède k solutions p.p. linéairement indépendantes.*

($AP^0(\mathbb{E}; M)$ est un espace de fonctions p.p. à valeurs dans $\mathbb{E}$ qui seront définies page 5.)

Enfin un dernier résultat qui concerne l'existence et l'unicité des solutions presque-périodiques de systèmes semi-linéaires (1) tels que la partie linéaire est presque-périodique et ses coefficients diagonaux sont de moyenne non nulle, ainsi qu'un résultat de dépendance continue des solutions presque-périodiques du système non linéaire (2) par rapport à un terme de contrôle presque-périodique.

Théorème 0.7 *Soit* $A \in AP^0(\mathbb{M}(n, \mathbb{R}))$ *telle que* $\mathcal{M}\{A_{ii}\} \neq 0$ *pour* $i = 1, \cdots, n$ *et soit* $f \in APU(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. *On suppose aussi que les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$\|R\|_\infty < \frac{1}{\|T\|_\infty \alpha + 1 + \alpha},$$

et $\forall t \in \mathbb{R}$ *et* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{cases} \textit{il existe } k \in]0, (\|T\|_\infty \alpha + 1 + \alpha)^{-1} - \|R\|_\infty[\\ \textit{tel que } \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k\|x - y\|, \end{cases}$$

où $T_{ij} = A_{ij} \times \mathbf{1}_{\{\mathbf{j} \geq \mathbf{i}\}}$ *et* $R = A - T$. *Alors l'équation*

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t))$$

possède une unique solution dans $AP^1(\mathbb{R}^n)$.

($\mathcal{M}\{f\}$ est la moyenne temporelle de f qui sera définie page 3).

Théorème 0.8 *Soit* $A \in AP^0(\mathbb{M}(n, \mathbb{R}))$ *telle que* $\mathcal{M}\{A_{ii}\} \neq 0$ *pour* $i = 1, ..., n$ *et* $f \in APU(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$ *qui satisfait la condition suivante : pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et pour* $(x, y, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$,

$$\begin{cases} \textit{il existe } c \in]0, (\|T\|_\infty \alpha + 1 + \alpha)^{-1}[\textit{ s.t.} \\ \|f(t, x, u) - f(t, y, u)\| \leq c\|x - y\|, \end{cases}$$

où α *est la constante de Bohr-Neugebauer, et T est défini comme précédemment. Alors, pour tout* $u \in AP^0(\mathbb{R}^p)$, *il existe une unique solution* $\tilde{x}[u]$ *de*

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t), u(t))$$

qui est dans $AP^1(\mathbb{R}^n)$. *De plus l'application* $u \mapsto \tilde{x}[u]$ *est continue de* $AP^0(\mathbb{R}^p)$ *dans* $AP^1(\mathbb{R}^n)$.

Dans le dernier chapitre, on montre que si A est presque-périodique et si toutes les solutions de (9) sont presque-périodiques, alors il existe une fonction b presque-périodique telle que l'équation (4) ne possède aucune solution bornée. De plus pour tout $c \in]0, \infty[$ on peut choisir la fonction b telle que $\|b\|$ est constante et égale à c sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, si pour toute fonction b presque-périodique l'équation (4) possède une solution bornée, alors l'équation (9) possède au moins une solution qui n'est pas presque-périodique.

Bibliographie

[1] J. Favard ; "Sur les équations différentielles à coefficients presque-périodiques ", Acta Mathematica 51 (1927), 31-81.

[2] A. M. Fink ; "Almost Periodic Differential Equations", Lecture Notes in Mathematics 377, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[3] C. Chicone ; "Ordinary Differential Equations with Applications", Springer-Verlag, New York 1999.

[4] G. Floquet ; "Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques", Annales de l'École Normale Supérieure 12, (1883), 47-88.

[5] V. V. Nemytskii and V. V. Stepanov ; "Qualitative Theory of Differential Equations", Princeton Mathematical Series, no. 22, Princeton University Press, New Jersey, 1960.

[6] N. N. Bogoljubov, Ju. A. Mitropolskii and A. M. Samoilenko ; "Methods of Accelerated Convergence in Nonlinear Mechanics", Springer-Verlag, New York, 1976, translated from the original Russian, Naukova Dumka, Kiev, 1969.

[7] A. Jorba and C. Simó ; "On the reducibility of linear differential equations with quasiperiodic coefficients", Journal of Differential Equations 98 (1992), no. 1, 111-124.

[8] J. Xu and Q. Zheng ; "On the reducibility of linear differential equations with quasiperiodic coefficients which are degenerate", Procedings of the Americain Mathematical Society, 126 (1998), no. 5, 1445-1451.

[9] Z. Lin ; "The Floquet Theory for Quasi-Periodic Linear Systems", Applied Methematics and Mechanics (Edition Anglaise), 3 (3), June 1982.

[10] Z. Lin ; "Theory of Linear Systems", Annals of Differential Equations, 6 (2), 1990, 153-215.

[11] Z. Lin and Y. X. Lin; "Linear Systems, Exponential Dichotomy, and Structure of Sets of Hyperbolic Points", World Scientific, Singapore, 2000.

Rappels sur les fonctions presque-périodiques et quasi-périodiques

1

Le but de ce chapitre est de présenter les notions de fonctions presque-périodiques (p.p.) et quasi-périodiques (q.p.), leurs principales propriétés et de donner certains résultats existants utiles par la suite.

$\mathbb{E}$ désigne un espace de Banach réel, et $\|.\|_{\mathbb{E}}$ sa norme. On note par $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{E}$ et $C^k(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ l'espace des fonctions de classe C^k sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{E}$.

1.1 Fonctions presques-périodiques au sens de bohr

1.1.1 Définition de Bohr

Définition 1.1 *Un sous-ensemble S de $\mathbb{R}$ est dit relativement dense dans $\mathbb{R}$ si il existe un nombre positif L tel que*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad [a, a+L] \cap S \neq \emptyset.$$

Le nombre L est appelé la longueur d'inclusion.

Définition 1.2 *Pour une fonction bornée f et un nombre réel $\epsilon > 0$, on définit*

$$T(f, \epsilon) = \{\tau \in \mathbb{R} |\ \|f(t+\tau) - f(t)\| < \epsilon,\ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

$T(f, \epsilon)$ est l'ensemble des ϵ-presque-périodes de f.

Définition 1.3 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ une application continue. On dit que f est p.p. (presque-périodique) au sens de Bohr, si pour tout $\epsilon > 0$, $T(f, \epsilon)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$. i.e. $\forall \epsilon > 0$, il existe un nombre $l = l(\epsilon) > 0$, tel que tout intervalle $[a, a+l]$ contienne un nombre $\tau = \tau_\epsilon$ satisfaisant*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\|_{\mathbb{E}} \leq \epsilon.$$

Exemple 1.1 *1 : Toute fonction continue périodique est une fonction presque-périodique. En effet, soit T la période de f, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nT sont aussi des périodes de f et donc sont des presque-périodes de f, pour tout $\epsilon > 0$. Or l'ensemble $\{nT; n \in \mathbb{Z}\}$ est relativement dense, ce qui implique que f est presque-périodique au sens de Bohr.*

Exemple 1.2 *2 : $t \mapsto f(t) = \cos(t) + \cos(\sqrt{2}t)$ est une fonction presque-périodique qui n'est pas périodique.*

Notation : On note par $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ l'espace de toutes les fonctions presque-périodiques au sens de Bohr de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$. $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|_\mathbb{E}$$

est un espace de Banach.
cf. ((1), (2), (3), (4)).

Proposition 1.1 *$AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ jouit des propriétés suivantes :*

1. *Tout élément de $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ est uniformément continu.*
2. *Tout élément de $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ est à image relativement compacte sur $\mathbb{E}$, donc borné sur $\mathbb{R}$.*
3. *Si pour $i = 1, 2, \cdots, p$, $f_i \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E}_i)$, $\mathbb{E}_i$ étant un espace de Banach, alors $(f_i)_{1 \leq i \leq p} \in AP^0(\mathbb{R}, \prod_{1 \leq i \leq p} \mathbb{E}_i)$.*
4. *Si $(f_n)_n$ est une suite des fonctions presque-périodiques et qu'elle converge uniformément vers une fonction f, alors $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.*

cf. ((1), (3), (4)).

Proposition 1.2

1. *Si f et $g \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, alors $f + g \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.*
2. *Si $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $\phi \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors $\phi.f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.*
3. *Si F est un espace de Banach, et si $g : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{F}$ est une application continue sur l'adhérence de l'image de f, alors $g \circ f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{F})$.*

cf. ((1), (2), (3), (4)).

1.1.2 Définition de Bochner

Notons par $BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, l'ensemble de fonctions continues, bornées de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{E}$.

Théorème 1.1 (Bochner) *Soit $f \in BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. Alors $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ si et seulement si l'ensemble*

$$\mathcal{T}(f) = \{\tau_r(f) = f(. + r),\ r \in \mathbb{R}\}$$

est relativement compact dans $(BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{E}), \|.\|)$.

cf. ((3, Chapitre VIII, page 9))

Proposition 1.3 *Soit $f \in BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. Alors $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ si et seulement si pour toute suite réelle $(r'_n)_n$, il existe une sous-suite de $(r'_n)_n$ notée par $(r_n)_n$ telle que :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} f(t + r_n) = g(t) \text{ et } \lim_{n\to\infty} g(t - r_n) = f(t).$$

cf. (2, Théorème 1.17, p. 12).

Définition 1.4 *Lorsque $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, la quantité*

$$\mathfrak{M}\{f\} = \mathfrak{M}_t\{f(t)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)dt$$

désigne la moyenne temporelle de f.

Dans le chapitre 3 on utilisera la notation $\mathcal{M}\{f\}$ au lieu de $\mathfrak{M}\{f\}$.

Proposition 1.4 *Si $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, alors $\mathfrak{M}\{f\}$ existe dans $\mathbb{E}$.*

Proposition 1.5 *Soit $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $a \in \mathbb{R}$, alors on a*

$$\mathfrak{M}_t\{f(t + a)\} = \mathfrak{M}_t\{f(t)\}.$$

Remarque 1.1 *Lorsque $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $[t \to f(t)e^{-i\lambda t}]$ est dans $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et par suite sa moyenne existe dans $\mathbb{E}$. Ainsi on définit :*

Définition 1.5 *Pour $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit le coefficient de Fourier-Bohr d'indice λ de f par :*

$$a(f, \lambda) = \mathfrak{M}_t\{f(t)e^{-i\lambda t}\} \in \mathbb{E}_{\mathbb{C}}.$$

où $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$ est le complexifié de $\mathbb{E}$.

Proposition 1.6 *Soit $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. L'ensemble*

$$\Lambda(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \ a(f, \lambda) \neq 0\}$$

est au plus dénombrable.

Proposition 1.7 *Soit $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. Alors f est développable en série de Fourier-Bohr*

$$f(t) \sim \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} a(f, \lambda) e^{i\lambda t}.$$

La convergence ayant lieu en moyenne quadratique (au sens des familles sommables). De plus si $\mathbb{E}$ est un espace de Hilbert, on a l'égalité de Parseval :

$$\mathfrak{M}_t\{\|f\|^2_{\mathbb{E}}\} = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \|a(f, \lambda)\|^2_{\mathbb{E}_{\mathbb{C}}}.$$

cf. (3, page 22 et page 29).

Théorème 1.2 *Si deux fonctions presque-périodiques ont la même série de Fourier-Bohr, alors elles sont identiques.*

Définition 1.6 *Si $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, on définit $Mod(f)$ le $\mathbb{Z}$-module engendré par $\Lambda(f)$, c'est-à-dire :*

$$Mod(f) = \left\{ \sum_{j=0}^{n} k_j \lambda_j : \quad n \in \mathbb{N},\ k_j \in \mathbb{Z},\ \lambda_j \in \Lambda(f) \right\}.$$

Le résultat suivant traduit une propriété sur les modules de fréquences de façon purement analytique.

Théorème 1.3 *Soient f et $g \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $Mod(g) \subset Mod(f)$.

(ii) Pour toute suite réelle $(r_n)_n$,

$$\begin{aligned} &(f(.+r_n))_n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R} \\ \Longrightarrow\ &(g(.+r_n))_n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(iii) Pour toute suite réelle $(r_n)_n$ qui converge dans $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned} &(f(.+r_n))_n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R} \\ \Longrightarrow\ &(g(.+r_n))_n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

cf. (7), (2, Théorème 4.5 , page 61), (5, page 928).
Comme conséquence de ce dernier théorème on a :

Corollaire 1.1 *Soit $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et ϕ est une application continue de $\overline{f(\mathbb{R})}$ dans $\mathbb{F}$ (un autre espace de Banach). Alors*

$$Mod(\phi \circ f) \subset Mod(f).$$

1.1.3 Dérivation et intégration des fonctions presque-périodiques

Lorsqu'une fonction périodique est dérivable, sa dérivée est automatiquement périodique. Lorsqu'il s'agit des fonctions presque-périodiques, ceci n'est pas vrai, puisque rien n'assure que la dérivée soit uniformément continue, ce qui est nécessaire pour être presque-périodique. En fait, un résultat remarquable assure que cette condition est suffisante :

Proposition 1.8 *Si $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E}) \cap C^1(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et f' est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors $f' \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.*

Notation 1.4 *Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit :*

$$AP^k(\mathbb{R}, \mathbb{E}) = \left\{ f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{E}) : \ \forall j = 0, 1, \cdots, k; \ \frac{d^j f}{dt^j} \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E}) \right\}.$$

et lorsque M est un sous-$\mathbb{Z}$-module dans $\mathbb{R}$, on définit :

$$AP^k(\mathbb{E}, M) = \{u \in AP^k(\mathbb{R}, \mathbb{E}) : Mod(u) \subset M\}$$

Parfois, on note par $AP^k(\mathbb{E})$ au lieu de $AP^k(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.

Exemple 1.3 *La fonction $t \mapsto f(t) = \exp(\sin(t) + \sin(\pi t))$ appartient à $AP^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

Proposition 1.9 *$AP^k(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ muni de la norme*

$$\|f\|_{C^k} = \|f\|_\infty + \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{d^j f}{dt^j} \right\|_\infty$$

est un espace de Banach.

Pour une fonction périodique continue, la condition d'être de moyenne nulle assure que les primitives sont presque-périodiques. Pour les fonctions presque-périodiques, cette condition ne suffit pas, comme le montre l'exemple suivant (cf. (14, page 198)) :

Exemple 1.4 *On note f la fonction :*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{t}{2k+1}\right)$$

Cette fonction est presque-périodique, et de moyenne nulle. En effet, Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\int_0^t f(s)\, ds &\leq \frac{1}{t}\int_0^t \Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{s}{2k+1}\right) + \epsilon \Big)\, ds \\ &\leq \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2k+1} + \epsilon, \end{aligned}$$

Et par suite $\mathcal{M}\{f\} = 0$.

D'autre part si g *une la primitive de* f*, alors on a*

$$g(t) = \int_0^t f(s)\,ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-\cos(\frac{t}{2k+1})}{2k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} \sin^2\Big(\frac{t}{2(2k+1)}\Big) \geq 0.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *on a*

$$g(t) > \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2k+1} \sin^2\big(\frac{t}{2(2k+1)}\big).$$

Prenons $t_0 = 1 \times 3 \times \cdots \times (2N+1)\pi$. *Si* $0 \leq k \leq N$, *alors* $\frac{t_0}{2(2k+1)} = \frac{1}{2}(2r+1)\pi$, *où* $r \in \mathbb{N}$, *donc*

$$g(t_0) > \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2k+1} > \int_0^N \frac{ds}{2s+1} = \frac{1}{2}\ln(2N+1)$$

pour tout entier positif N. *Ainsi,* g *est non bornée donc n'est pas une presque-périodique.*

En fait, la condition de relative compacité de l'image des primitives, qui est necéssaire, n'est pas automatiquement satisfaite. Il est remarquable que cette condition soit suffisante :

Proposition 1.10 *Soit* $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ *et* F *une primitive de* f*. L'une des conditions suivantes assure que les primitives soient presque-périodiques.*

1. *L'image de* F *est relativement compacte.*
2. F *est bornée et* $\mathbb{E}$ *est uniformément convexe.*

1.1.4 Fonction presque-périodique avec paramètre

On considère la fonction

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) &\longmapsto \cos(xt) \end{aligned}$$

Il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et la fonction $F(.,t)$ est périodique et par conséquent presque-périodique. Malgré la presque-périodicité de la fonction $[t \longmapsto \cos(t)]$, la fonction $[t \longmapsto F(\cos(t),t)]$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et par conséquent n'est pas presque-périodique. Plus généralement si $F \in C^0(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathbb{F})$, où $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont des espaces de Banach, est telle que $F(x,.)$ est presque-périodique pour $x \in \mathbb{E}$, et $\phi : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{E}$ est presque-périodique, alors la fonction

$[t \longmapsto F(\phi(t), t)]$ n'est pas forcément presque-périodique. Une certaine uniformité par rapport à x est necéssaire.

Définition 1.7 *Soit $F \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$. On dit que F est presque-périodique en t uniformément par rapport à x, si pour tout compact K de $\mathbb{E}$*

$$\forall \epsilon > 0, \exists l_\epsilon > 0; \forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [\alpha, \alpha + l_\epsilon] \text{ tels que}$$
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{E}, \quad \|f(t+\tau, x) - f(t,x)\|_{\mathbb{E}} \leq \epsilon.$$

Notation 1.5 *Par $APU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$ on note l'espace des telles fonctions.*

Théorème 1.6 *soit $F \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$. F est presque-périodique en t uniformément par rapport à x si et seulement si, pour toute suite $(r_n)_n$ de réels, il existe une sous-suite $(r'_n)_n$ de $(r_n)_n$ et une fonction $G \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ telles que pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$,*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{x \in K} \|F(t + r'_n, x) - G(t,x)\|_{\mathbb{R}^M} = 0.$$

Proposition 1.11 *Si F et G sont deux fonctions presque-périodiques en t uniformément par rapport à x, alors*

1. *$F + G$ est presque-périodique en t uniformément par rapport à x.*

2. *Pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$, F est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R} \times K$.*

Théorème 1.7 *Si $F \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$ est presque-périodique en t uniformément par rapport à x et $\phi \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, alors l'application $[t \longmapsto F(t, \phi(t))] \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{F})$.*

cf. (6), (7, Théorème 2.7, page 16).

Définition 1.8 *Si $F \in APU(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$, on définit*

$$\Lambda(F) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \ \exists x \in \mathbb{R}^N, \quad \mathfrak{M}_t\{F(t,x)e^{-i\lambda t}\} \neq 0 \right\},$$

et $Mod(F)$ est le $\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{R}$ engendré par $\Lambda(F)$.

Théorème 1.8 *Soient F et $G \in APU(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$. Pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Pour toute suite réelle $(r_n)_n$,

$$\begin{aligned} &(F(. + r_n))_n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R} \times K \\ \Longrightarrow\ &(G(. + r_n))_n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R} \times K. \end{aligned}$$

(ii) Pour toute suite réelle $(r_n)_n$ qui converge dans $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned} & (F(.+r_n))_n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}\times K \\ \Longrightarrow\ & (G(.+r_n))_n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}\times K. \end{aligned}$$

(iii) $Mod(G) \subset Mod(F)$.

cf. (2), (7) (5, page 933).

1.2 Fonctions quasi-périodiques

1.2.1 Fonctions quasi-périodiques

Définition 1.9 *Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ est dite quasi-périodique lorsque $f \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $Mod(f)$ possède une base finie sur $\mathbb{Z}$.*

Notation 1.9 *Soit $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n)$ une liste de n nombres réels qui sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants. Par $QP^0_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ (ou $QP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{E})$), on note l'espace des fonctions f quasi-périodiques telles que $Mod(f) \subset \langle\omega\rangle$.*

Définition 1.10 *Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble des fonctions quasi-périodiques d'odre k comme suit :*

$$QP^k_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{E}) = AP^k(\mathbb{R}, \mathbb{E}) \cap QP^0_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{E}).$$

Proposition 1.12 *Pour $k \in \mathbb{N}$, $QP^k_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ est un sous-espace de Banach de $AP^k(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.*

Soit $\mathbb{T}^N = (\mathbb{R}^N/2\pi\mathbb{Z}^N)$ le tore de dimension N. Une manière classique de généraliser les fonctions quasi-périodiques est de considérer $F \in C^0(\mathbb{T}^N, \mathbb{E})$. Ce qui fait l'objet du théorème suivant :

Théorème 1.10 *Il existe un isomorphisme isométrique (bicontinu) entre les espaces de Banach $QP^0_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $C^0(\mathbb{T}^N, \mathbb{E})$.*

cf. (8).

Remarque 1.2 *L'isomorphisme dans le théorème précédent est*

$$\mathfrak{Q}_\omega : \mathbb{E}^{\mathbb{T}^N} \longrightarrow \mathbb{E}^{\mathbb{R}}; \quad \mathfrak{Q}_\omega(u)(t) = u(t\omega).$$

Ainsi $f \in QP^k_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ si et seulement si il existe une fonction $F \in C^k(\mathbb{T}^N, \mathbb{E})$ telle que

$$f(t) = F(t\omega), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si $x \in \mathbb{T}^N$, alors $x = \tilde{x} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. $F \in C^k(\mathbb{T}^N, \mathbb{E})$ est équivalent à dire que $F \in C^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{E})$ telle que $x_j \longmapsto F(x_1, \cdots, x_N)$ est 2π-périodique pour tout $1 \leq j \leq N$.

Exemple 1.5 *La fonction $t \mapsto f(t) = \cos(t) + \cos(\sqrt{3}t)$ est quasi-périodique. En effet, on peut écrire*

$$f(t) = F(t, \sqrt{3}t)$$

où

$$F(\theta_1, \theta_2) = \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2).$$

1.2.2 Fonctions quasi-périodiques avec paramètre

Soit $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_N)$ une liste des N nombres réels $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants.

Définition 1.11 *Soit $F \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$, on dit que F est quasi-périodique en t uniformément par rapport à x si $F \in APU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$ et $Mod(F) \subset \langle \omega \rangle$. Par $QPU_\omega(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$ on note les classes des telles fonctions.*

Théorème 1.11 *Lorsque $g \in QPU_\omega(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$, il existe une fonction $G \in C^0(\mathbb{T}^N \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$ telle que :*

$$g(t, x) = G(t\omega, x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}.$$

cf. (8).

1.3 Opérateurs de Nemytskii

Définition 1.12 *Soit $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces de Banach, et $F : \mathbb{R} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$, $(t, x) \longmapsto F(t, x)$. On appelle opérateur de Nemytskii (ou aussi opérateur de superposition) construit sur F, l'opérateur $\mathcal{N}_F$ de la forme suivante :*

$$[t \longmapsto u(t)] \longmapsto \mathcal{N}_F(u) = [t \longmapsto F(t, u(t))]$$

où u est une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{E}$.

Dans ce paragraphe nous étudions la continuité et la dérivabilité de l'opérateur de Nemytskii entre les espaces des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr. Rappelons que la théorie des opérateurs de Nemytskii dans les espaces de classe C^k sur les domaines bornés est traitée dans (10, page 168) et (11, page 211), pour les espaces L^p, elle est traitée dans (12, Chapitre I et II). Pour les espaces de Sobolev usuels on peut consulter (13).

Lemme 1.1 *Soit K une partie compacte de $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, alors*

$$S = \{u(t) \ : \quad t \in \mathbb{R}, \quad u \in K\}$$

est une partie relativement compacte de $\mathbb{E}$.

Proposition 1.13 *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces de Banach. Si $F \in APU(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathbb{F})$, alors l'opérateur de Nemytskii construit sur F, $\mathcal{N}_F : AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E}) \longrightarrow AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{F})$, défini par $\mathcal{N}_F(u)(t) := F(u(t), t)$ est continu.*

cf. (9).

Démonstration. Il est clair que $\mathcal{N}_F(u) \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{F})$ lorsque $u \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. Soit K une partie compacte de $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, soit $u \in K$ et ϵ un nombre strictement positif. On pose

$$S = \{u(t) \ : \quad t \in \mathbb{R}, \quad u \in K\} ,$$

en utilisant le Lemme 1.1, S est une partie relativement compacte de $\mathbb{E}$, donc S est une partie compacte de $\mathbb{E}$. F étant dans $APU(\mathbb{E} \times \mathbb{R}, \mathbb{F})$, il existe $l > 0$, tel que tout intervalle de longueur l contient un nombre τ satisfaisant la condition suivante :

$$\sup\{\|F(x, s+\tau) - F(x, s)\|_{\mathbb{F}} \ : \quad s \in \mathbb{R},\, x \in S\}. \tag{1.1}$$

$\overline{S} \times [0, l]$ étant un compact, comme produit de deux compacts, donc F est uniformément continue dessus, par conséquent il existe $\delta = \delta(\overline{S} \times [0, l], \epsilon) > 0$, tel que pour tout s_1 et s_2 dans $[0, l]$, et pour tout x_1 et x_2 dans $\overline{S}$ on a :

$$(\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{E}} \leq \delta,\, |s_1 - s_2| \leq \delta) \implies \|F(x_1, s_1) - F(x_2, s_2)\|_{\mathbb{F}} \leq \frac{\epsilon}{3}$$

d'où

$$\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{E}} \leq \delta \implies \|F(x_1, s_1) - F(x_2, s_2)\|_{\mathbb{F}} \leq \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall s \in [0, l]. \tag{1.2}$$

Soit $v \in K$, tel que $\|u - v\|_\infty$, en utilisant (1.1) et (1.2), on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\|F(u(t), t) - F(v(t), t)\|_{\mathbb{F}} \leq & \|F(u(t), t) - F(u(t), t-\tau)\|_{\mathbb{F}} \\ & + \|F(u(t), t-\tau) - F(v(t), t-\tau)\|_{\mathbb{F}} \\ & + \|F(v(t), t-\tau) - F(v(t), t)\|_{\mathbb{F}} \\ \leq & 3 \times \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,\end{aligned}$$

ce qui entraîne que

$$\sup\{\|F(u(t), t) - F(v(t), t)\|_{\mathbb{F}} \ : \quad t \in \mathbb{R}\} \leq \epsilon,$$

ou encore

$$\|\mathcal{N}_F(u) - \mathcal{N}_F(v)\|_\infty \leq \epsilon.$$

Ainsi la restriction de $\mathcal{N}_F$ à tout compact K de $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ est continue, sachant que $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{F})$ sont deux espaces de Banach. Ce qui prouve que $\mathcal{N}_F$ est continu sur $AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. $\square$

Théorème 1.12 *On suppose que $F \in APU(\mathbb{E}\times\mathbb{R},\mathbb{F})$ est telle que la dérivée partielle $D_xF(x,t)$ existe pour tout $(x,t)\in\mathbb{E}\times\mathbb{R}$, et que $D_xF \in APU(\mathbb{E}\times\mathbb{R},\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F}))$. Alors l'opérateur de Nemytskii construit sur F, $\mathcal{N}_F : AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E}) \longrightarrow AP^0(\mathbb{R},\mathbb{F})$ est de classe C^1 et*

$$(D\mathcal{N}_F(u).h)(t) = D_xF(u(t),t).h(t)$$

pour tout $t\in\mathbb{R}$, $u,h\in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$.

cf. (9).

Démonstration. On a $F \in APU(\mathbb{E}\times\mathbb{R},\mathbb{F})$ donc d'après la Proposition 1.13, $\mathcal{N}_F \in C^0(AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E}),AP^0(\mathbb{R},\mathbb{F}))$. De même, $D_xF \in APU(\mathbb{E}\times\mathbb{R},\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F}))$ donc d'après la Proposition 1.13,

$$\mathcal{N}_{D_xF} \in C^0(AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E}),AP^0(\mathbb{R},\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F}))),$$

avec

$$[\mathcal{N}_{D_xF}(u)](t) = D_xF(u(t),t),$$

pour tout $t\in\mathbb{R}$. D'après (3, chapitre VII page 6, et chapitre IX page 10), si $[t\mapsto h(t)]$ est dans $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$, alors $[t\mapsto D_xF(u(t),t).h(t)]$ est dans $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{F})$. Notons par L_u l'opérateur linéaire défini de $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$ dans $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{F})$ par

$$[L_u.h](t) = D_xF(u(t),t).h(t)$$

pour tout $t\in\mathbb{R}$. Pour $\|h\|_\infty = \sup\{\|h(t)\|_{\mathbb{E}} : \quad t\in\mathbb{R}\}\le 1$, on a

$$\begin{aligned}\|[L_u.h](t)\|_{\mathbb{F}} &= \|D_xF(u(t),t).h(t)\|_{\mathbb{F}}\\ &\le \|D_xF(u(t),t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})}.\|h(t)\|_{\mathbb{F}}\\ &\le \|\mathcal{N}D_xF\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})}\\ &\le \sup_{t\in\mathbb{R}}\|D_xF(u(t),t)\|_{\mathbb{F}}\\ &< \infty.\end{aligned}$$

(Sachant que la fonction $[t\mapsto D_xF(u(t),t)]$ est dans $AP^0(\mathbb{R},\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F}))$, donc bornée sur $\mathbb{R}$). Ainsi on a démontré que l'ensemble des $\|[L_u.h]\|_\infty$, quand $\|h\|_\infty\le 1$, est bornée.
De plus, pour $\|h\|_\infty \le 1$ on a :

$$|[D_xF(u(t),t) - D_xF(v(t),t)].h(t)\|_{\mathbb{F}} \le \|\mathcal{N}_{D_xF}(u) - \mathcal{N}_{D_xF}(v)\|_{\mathbb{F}}.$$

Puisque $\mathcal{N}_{D_xF}$ est continu, l'application

$$L_u : AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E}) \longrightarrow \mathcal{L}\left(AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E}),AP^0(\mathbb{R},\mathbb{F})\right)$$

est continue.

Soit u et h dans $AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$, et $\theta\in\ [0,1]$. Il est clair que $[t\mapsto u(t)+\theta v(t)]\in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$, et d'après le théorème de la moyenne (cf. (10, page

144)), on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\|F(u(t)+h(t),t) - F(u(t),t) - D_xF(u(t),t).h\|_{\mathbb{F}} \\
&\leq \int_0^1 \|[D_xF(u(t)+\theta h(t),t) - D_xF(u(t),t)].h\|_{\mathbb{F}}\, d\theta \\
&\leq \int_0^1 \|[D_xF(u(t)+\theta h(t),t) - D_xF(u(t),t)].h\|_{\mathbb{F}}\, d\theta.\|h\|_\infty \\
&\leq \xi(h).\|h\|_\infty
\end{aligned}$$

où

$$\xi(h) = \sup\{\|D_xF(u(t),t) - D_xF(v(t),t)\|_{\mathbb{F}}; \quad v \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E}), \|u-v\|_\infty \leq \|h(t)\|_\infty\}.$$

Ainsi on a démontré que

$$\|\mathcal{N}_F(u+h) - \mathcal{N}_F(u) - L_u.h\| \leq \|h(t)\|_\infty.\xi(h).$$

Or $\lim_{h\to\infty} \xi(h) = 0$ (car $\mathcal{N}_{D_xF}$ est continu en u), d'où $\mathcal{N}_F$ est Fréchet-différentiable et $D\mathcal{N}_F(u).h = L_u.h$, i.e.

$$(D\mathcal{N}_F(u).h)(t) = D_xF(u(t),t).h(t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u, h \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$. De plus L est continue, donc $\mathcal{N}_F$ est de classe C^1. $\square$

Bibliographie

[1] H. Bohr ; "Almost Periodic Functions", Chelsea, New York, 1956.

[2] A. M. Fink ; "Almost Periodic Differential Equations", Lecture Notes in Mathematics 377, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[3] L. Amerio and G. Prouse ; "Almost Periodic Functions and Functional Equations", van Nostrand Reinhold Company, 1971.

[4] B. M. Levitan and V. V. Zhikov ; "Almost Periodic Functions and Differential Equations", Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[5] F. Chérif ; "A Various Types of Almost Periodic Functions on Banach Spaces : Part I" ; International Mathematical Forum, Vol. 6, 2011, no. 19, 921 - 952.

[6] P. Cieutat ; "Solutions presque-périodiques d'équations d'évolution et de systèmes non linéaires" ; Thèse de Doctorat, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, 1996.

[7] T. Yoshizawa ; "Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions", Springer-Verlag, New York, 1975.

[8] J. Blot and D. Pennequin ; "Spaces of Quasi-Periodic Functions and Oscillations in Differential Equations", Acta Applicandae Mathematicae, 65, 2001, 83-113.

[9] J. Blot, P. Cieutat, G.M. N'Guérékata and D. Pennequin ; "Superposition Operators between Various Almost Periodic Function Spaces and Applications", Communications in Mathematical Analysis, 6 (1), 2009, 12-70.

[10] V. M. Alexeev, V. M. Tihomirov and S. V. Fomin ; "Commande optimale", Edition Française, Mir, Moscou, 1982.

[11] T. M. Flett ; "Differential Analysis", Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[12] M. Krasnoselskii ; "Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations", Moscow 1956, English trans. Macmillan, New York 1964.

[13] J. Mawhin and M. Williem ; "Critical Point Theory and Hamiltonian Systems", Springer-Verlag, New York, 1989.

[14] Z. Lin ; "Theory of Linear Systems", Annals of Differential Equations 6 (2), 1990, 153-215.

2 Solutions quasi-périodiques d'équations différentielles non linéaires via la théorie de Floquet-Lin.

2.1 Introduction

On utilise une théorie de Floquet due à Zhensheng Lin pour les équations différentielles ordinaires linéaires quasi-périodiques pour obtenir des résultats sur les solutions quasi-périodiques des équations différentielles ordinaires non linéaires.

Premièrement, on obtient un résultat d'existence, deuxièmement on obtient un résultat sur la dépendance continue en utilisant un théorème de point fixe avec paramètre, et troisièmement on obtient un résultat local sur la dépendance différentiable en utilisant le théorème des fonctions implicites dans les espaces des fonctions.

Notre but est d'étudier les solutions quasi-périodiques des équations différentielles ordinaires des classes suivantes :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t)) \tag{2.1}$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(t, x(t), u(t)) \tag{2.2}$$

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)) \tag{2.3}$$

où A est une matrice quasi-périodique, u est une fonction quasi-périodique (terme de forcing ou terme de contrôle), f et g sont des fonctions quasi-périodiques par rapport à t.

Pour traiter ces problèmes on utilise les propriétés de l'équation différentielle ordinaire linéaire forcée suivante :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{2.4}$$

où b est une fonction quasi-périodique. Pour étudier l'équation (2.4) on utilise la théorie de Floquet pour les équations différentielles quasi-périodiques due à Zhensheng Lin (2), (3), (4), et des outils d'Analyse Fonctionnelle Non Linéaire.

2.2 Notations et définitions

Quand $\mathbb{T}^N$ désigne le tore usuel de dimensions N, par $W^{k,2}(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}^n)$ on note l'espace de Sobolev défini comme suivant :

$$W^{k,2}(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}^n) = \{\phi \in L^2(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}^n) | \ \forall \ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N \\ \text{tq } |\alpha| \leq k, D^\alpha \phi \in L^2(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}^n)\}$$

où $D^\alpha \phi$ est la dérivée de ϕ dans le sens des distributions de Schwartz , et $|\alpha| = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j$. cf. (8).

On note par $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ l'espace de $p \times n$ matrices réelles, par $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ l'espace de $n \times n$ matrices réelles, et on note par $GL(n, \mathbb{R})$ le groupe linéaire général des $n \times n$ matrices réelles inversibles.

2.3 Systèmes différentiels périodiques et triangularisation

On considère le système différentiel ordinaire linéaire homogène suivant :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \tag{2.5}$$

où A est une matrice de format $n \times n$, continue.

Théorème 2.1 *Les solutions du système linéaire homogène* (2.5) *forment un espace vectoriel S_n de dimension n .*

Définition 2.1 *Soit $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base de S_n. Alors on dit que $X(t) = col(x_1, \cdots, x_n)$, dont ces colonnes sont les vecteurs x_i, est la matrice fondamentale (ou solution fondamentale) de* (2.5).

Proposition 2.1 *Si X est une matrice fondamentale de* (2.5), *alors*

(i) X satisfait l'équation suivante

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t).$$

(ii) X est une matrice régulière, et toute matrice $\tilde{X}(t)$ solution de (2.5) *s'écrit comme suit :*

$$\tilde{X}(t) = X(t)D,$$

où D est une matrice constante.

Les deux résultats précédents sont classiques cf. (4, page 2 et page 3)

Le but de lemme qui suit est de montrer que le système périodique (2.5) se transforme sous certaines conditions en un système triangulaire supérieur périodique. (cf. (2), (3), (4)).

Lemme 2.1 *Soit $t \mapsto A(t) \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ continue et périodique de période T, alors il existe une transformation Q linéaire, orthogonale et T-périodique telle que si $y(t) = Q(t)^{-1}x(t)$, le système* (2.5) *se réduit à un système triangulaire*

$$\dot{y}(t) = C(t)y(t), \tag{2.6}$$

où C est une matrice triangulaire supérieure et périodique de période T.
Et si A est de classe C^τ, alors C est de classe C^τ et Q est de classe $C^{\tau+1}$, où τ est un entier positif. De plus si $\|A(t)\| \leq M$, alors $\|C(t)\| \leq 3M$.

Démonstration. Soit $X(t)$ une matrice fondamentale du système (2.5), alors $X(t+T)$ est aussi une matrice fondamentale de ce système, et par suite il existe une matrice D régulière constante telle que

$$X(t+T) = X(t)D \tag{2.7}$$

et

$$D = e^{BT}. \tag{2.8}$$

où B une matrice constante. On peut supposer que B est triangulaire supérieure.

Maintenant, en utilisant la méthode de Gramm-Schmidt, on construit une matrice orthogonale périodique Q de la manière suivante :

Premièrement, on pose

$$P(t) = X(t)e^{-Bt} = \big(p_1(t), ..., p_n(t)\big). \tag{2.9}$$

Alors par (2.7) et (2.8), il suit que P est périodique de période T.

Ensuite, on considère $Q(t) = col\big(q_1(t), ..., q_n(t)\big)$ définie comme suit :

$$\begin{cases} q_1(t) = \frac{p_1(t)}{\|p_1(t)\|}, \\ et \\ q_{k+1}(t) = \frac{q^0_{k+1}(t)}{\|q^0_{k+1}(t)\|} \end{cases} \tag{2.10}$$

où

$$q^0_{k+1}(t) = p_{k+1}(t) - \sum_{j=1}^{k} \frac{\big\langle q_j(t), p_{k+1}(t)\big\rangle}{\|q_j(t)\|^2},$$

pour tout $k = 1, ..., n-1$. Il est facile de montrer par récurrence que pour tout $k = 1, ..., n-1$,

$$q^0_{k+1}(t) \neq 0.$$

Comme P est T-périodique, il en découle que la suite des $(p_i)_{1\leq i\leq n}$ l'est aussi, ainsi que $(q_i)_{1\leq i\leq n}$. Et par suite Q est T-périodique.
De plus,

$$\begin{aligned} Q(t) &= \big(p_1(t), ..., p_n(t)\big)R_0(t) \\ &= X(t)e^{-Bt}R_0(t) \\ &= X(t)R(t), \end{aligned} \tag{2.11}$$

où $R_0(t)$ est une matrice triangulaire supérieure. En effet, pour tout $k = 2, ..., n$

$$\begin{aligned} q_k(t) &= \frac{1}{\|q_k^0(t)\|}\left(p_k(t) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle q_j(t), p_k(t)\rangle}{\|q_j(t)\|^2}\right) \\ &= \alpha_{1i}(t)p_1(t) + \alpha_{2i}(t)p_2(t) + ... + \alpha_{ii}(t)p_i(t). \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$Q(t) = (q_1(t), \cdots, q_n(t)) = (p_1(t), \cdots, p_n(t))\begin{pmatrix} \alpha_{11}(t) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Donc $Q(t) = P(t)R_0(t)$, où $R_0(t)$ est une matrice triangulaire supérieure. De plus le fait que B est triangulaire supérieure entraîne que $R(t) = e^{-Bt}R_0(t)$ et $\frac{dR^{-1}}{dt}(t)$ sont aussi triangulaires supérieures.

Maintenant, pour le système (2.5), on considère la transformation suivante

$$y(t) = Q^{-1}(t)x(t). \tag{2.12}$$

En dérivant (2.12) par rapport à t et en utilisant (2.5), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{dQ^{-1}}{dt}(t)x(t) + Q^{-1}(t)\dot{x}(t) \\ &= \frac{dQ^{-1}}{dt}(t)Q(t)y(t) + Q^{-1}(t)A(t)Q(t)y(t) \\ &= \left[\frac{dQ^{-1}}{dt}(t)Q(t) + Q^{-1}(t)A(t)Q(t)\right].y(t) \\ &= C(t)y(t), \end{aligned} \tag{2.13}$$

avec

$$C(t) = \frac{dQ^{-1}}{dt}(t)Q(t) + Q^{-1}(t)A(t)Q(t). \tag{2.14}$$

Du fait que A et Q sont T-périodiques, il découle que C aussi est T-périodique.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
C(t) &= \frac{dQ^{-1}}{dt}(t)Q(t) + Q^{-1}(t)A(t)Q(t) \\
&= \left[\frac{dR^{-1}}{dt}(t)R(t)Q(t) + R^{-1}(t)\frac{dX^{-1}}{dt}(t)\right]Q(t) + Q^{-1}(t)A(t)Q(t) \\
&= \frac{dR^{-1}}{dt}(t)R(t) + \left[R^{-1}(t)\frac{dX^{-1}}{dt}(t) + Q^{-1}(t)A(t)\right]Q(t) \\
&= \frac{dR^{-1}}{dt}(t)R(t) + 0 \\
&= \frac{dR^{-1}}{dt}(t)R(t).
\end{aligned}$$

Par conséquent, C est une matrice triangulaire supérieure et T-périodique. Ceci achève la preuve de la première partie du Lemme.

Maintenant, comme X est solution fondamentale de (2.5), si A est de classe C^τ, alors $\dot{X}$ est de classe C^τ et donc X est de classe $C^{\tau+1}$, ainsi par (2.9) et (2.10), il suit que Q est aussi de classe $C^{\tau+1}$ ce qui implique en utilisant (2.11) que R est de classe $C^{\tau+1}$. Par conséquent $C = \frac{dR^{-1}}{dt}R$ est de classe C^τ.

Ensuite, il ne reste à prouver que $\|C(t)\| \leq 3M$. On sait que la martice $Q(t)$ est orthogonale, donc $Q^{-1}(t) = Q^*(t)$, où Q^* désigne la matrice transposée de Q. Donc on peut écrire :

$$\begin{cases} C(t) = \frac{dQ^{-1}}{dt}(t)Q(t) + Q^{-1}(t)A(t)Q(t) \\ C^*(t) = Q^{-1}(t)\frac{dQ}{dt}(t) + Q^{-1}(t)A(t)Q(t) \end{cases} \tag{2.15}$$

En utilisant (2.11) et le fait que X est solution fondamentale de (2.5), on obtient

$$\begin{aligned}
C(t) &= \frac{d}{dt}\big(R_0^{-1}(t)e^{Bt}X^{-1}(t)\big)X(t)e^{-Bt}R_0(t) + R_0^{-1}(t)e^{Bt}X^{-1}(t)A(t)R_0(t)e^{-Bt}X(t) \\
&= \frac{dR_0^{-1}}{dt}(t)R(t) + R_0^{-1}(t)BR_0(t) + 0 \\
&= R_0^{-1}(t)BR_0(t) + \frac{dR_0^{-1}}{dt}(t)R_0(t).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$C(t) = R_0^{-1}(t)BR_0(t) + \frac{dR_0^{-1}}{dt}(t)R_0(t), \tag{2.16}$$

où les matrices C, R_0 et B sont triangulaires supérieures, donc on peut les écrire sous la forme

$$C(t) = \begin{pmatrix} c_{11}(t) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

et

$$R_0(t) = \begin{pmatrix} r_{11}(t) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

D'où (2.16) implique que :

$$c_{ii}(t) = b_{ii} + \frac{dr_{ii}^{-1}(t)}{dt} r_{ii}(t), \quad i = 1, ..., n. \tag{2.17}$$

Moyennant (2.7) et (2.8) et choisissant $X(0) = I$, on obtient

$$B = \frac{1}{T} \ln(X(T)).$$

D'après le lemme de Gronwall, si $\|A(t)\| \leq M$, on obtient

$$\|X(t)\| \leq e^{MT}.$$

Par suite on a

$$\|B\| \leq M. \tag{2.18}$$

Par (2.15) et le fait que Q est orthogonale, il suit que

$$\begin{aligned} C(t) + C^*(t) &= \frac{dQ^{-1}}{dt}(t)Q(t) + Q^{-1}(t)A(t)Q(t) + Q^{-1}(t)\frac{dQ}{dt}(t) \\ &+ Q^{-1}(t)A(t)Q(t) \\ &= \frac{dQ^{-1}(t)Q(t)}{dt} + Q^{-1}(t)(A(t) + A^*(t))Q(t) \\ &= 0 + Q^{-1}(t)(A(t) + A^*(t))Q(t) \\ &= Q^{-1}(t)(A(t) + A^*(t))Q(t). \end{aligned}$$

Comme C est triangulaire et puisque c_{ii} a la même partie imaginaire que b_{ii}, il en résulte que

$$\|C(t)\| \leq \|C(t) + C^*(t)\| + \|B\|,$$

Et en utilisant (2.17) et (2.18), on obtient

$$\begin{aligned} \|C(t)\| &\leq \|C(t) + C^*(t)\| + \|B\| \\ &\leq \|A(t) + A^*(t)\| + M \\ &\leq 2M + M = 3M. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du lemme. □

Remarque 2.1 *Si la matrice B dans* (2.8) *n'est pas triangulaire supérieure, on triangularise B : il existe une matrice F et B_0 triangulaire supérieure telle que $B_0 = FBF^{-1}$. En passant à l'exponentiel on trouve*

$$Fe^{BT}F^{-1} = e^{B_0T},$$

qui est triangulaire supérieure.
Alors dans la preuve du Lemme 2.1, on peut remplacer $X(t)$ par $Z(t) = X(t)F^{-1}$ pour obtenir

$$Z(t+T) = X(t+T)F^{-1}$$

et par (2.7)*, on obtient*

$$Z(t+T) = X(t)e^{BT}F^{-1} = X(t)F^{-1}Fe^{BT}F^{-1} = Z(t)e^{B_0T},$$

où B_0 est une matrice triangulaire supérieure.

2.4 Quelques propriétés des fonctions quasi-périodiques

2.4.1 Primitive d'une fonction quasi-périodique

Quand $f \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$, la primitive de f définie par $G(t) = \int_0^t f(s)ds$ peut ne pas appartenir à $QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$ même si $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(s)ds = 0$. Afin d'avoir G dans $QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$, on exige que $\omega = (\omega_1, ..., \omega_N)$ satisfasse la condition diophantienne suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } K(\omega) \in]0, \infty[\text{ telle que, pour tout } (l_1, ..., l_N) \in \mathbb{Z}^N_*, \\ |\sum_{j=1}^N l_j\omega_j| \geq K(\omega)(\sum_{j=1}^N |l_j|)^{-(N+1)}. \end{array} \right. \tag{2.19}$$

Dans la proposition suivante on montre que, sauf pour un ensemble Lebesgue-négligeagle, chaque point de $\mathbb{R}^N$ satisfait (2.19).

Proposition 2.2 *Pour tout vecteur $k = (k_1, ..., k_N) \in \mathbb{Z}^N_*$, presque tout vecteur $\omega = (\omega_1, ..., \omega_N)$ satisfait l'inégalité* (2.19).

cf. (4, Proposition 4.1, page 130).
On peut trouver quelques propriétés de (2.19) dans (3), (5).

Dans le lemme suivant on prouve un résultat de Z. Lin (2) en affaiblissant l'hypothèse de différentiabilité, précisement on remplace la différentiabilité forte par la différentiabilité distributionnelle.

Lemme 2.2 *Soit $f \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(t) = F(t\omega)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, où $F \in W^{\tau,2}(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}^n)$, $\tau = 2(N+1)\left(\frac{n(n+1)}{2}+1\right)$, et ω satisfait* (2.19). *On suppose que $\int_{\mathbb{T}^N} F(u)du = 0$. Alors la fonction $t \mapsto G(t) = \int_0^t f(s)ds$ appartient à $QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$. De plus, si f est de classe C^τ, alors G est de classe C^s où $s = \tau - 2(N+1)$.*

Démonstration. $F(u)$ peut être exprimée comme suit :

$$F(u) = \sum_{k\neq 0} a_k e^{i\langle k,u\rangle}.$$

Alors on a :

$$\frac{\partial^\tau F(u)}{\partial u_j^\tau} = \sum_{k\neq 0} (ik_j)^\tau a_k e^{i\langle k,u\rangle}, \text{ pour tout } j = 1, ..., N$$

et, pour tout $k = (k_1, ..., k_N) \in \mathbb{Z}^N_*$,

$$(ik_j)^\tau a_k = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^N \int_0^{2\pi} ... \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^\tau F(u)}{\partial u_j^\tau}\right) e^{-i\langle k,u\rangle} du \quad .$$

Soit $\|k\|_\infty = \max\{|k_1|, ..., |k_N|\}$, en choisissant j tel que $\|k\|_\infty = |k_j|$, et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\|k\|_\infty^\tau |a_k| \leq \left\| \frac{\partial^\tau F(u)}{\partial u_j^\tau} \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)} \left(\frac{1}{(2\pi)^N} \int_{Q_N} |e^{-i\langle k,u\rangle}|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| \frac{\partial^\tau F(u)}{\partial u_j^\tau} \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}$$

où $Q_N =]0, 2\pi[^N$, donc :

$$|a_k| \leq \|k\|_\infty^{-\tau} \left\| \frac{\partial^\tau F(u)}{\partial u_j^\tau} \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}.$$

Soit

$$M = \max_{1\leq j\leq N} \left\| \frac{\partial^\tau F(u)}{\partial u_j^\tau} \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}.$$

Alors on obtient :

$$|a_k| \leq M\|k\|_\infty^{-\tau}. \tag{2.20}$$

Maintenant, pour tout entier $r \in \mathbb{N}_*$, on définit :

$$C(r, N) = \sum_{\|k\|_\infty = r} 1 = 2N(2r+1)^{N-1} = 2N \sum_{j=1}^{N-1} C_j^{N-1}(2r)^j.$$

Alors, il existe une constante $C(N)$ telle que :

$$C(r, N) \leq C(N) r^{N-1}. \tag{2.21}$$

Soit $\|k\|_1 = |k_1| + ... + |k_N|$, puisque $\|k\|_1 \leq N\|k\|_\infty$, on a

$$\|k\|_\infty^{-\tau} \leq N^\tau \|k\|_1^{-\tau}.$$

Maintenant en combinant ceci avec (2.19) et (2.20), on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{\|k\|_\infty = r} \left| \frac{a_k}{\langle k, \omega\rangle} \right| &\leq \frac{1}{K(\omega)} \sum_{\|k\|_\infty = r} |a_k|.\|k\|_1^{N+1} \\
&\leq \frac{M}{K(\omega)} \sum_{\|k\|_\infty = r} \|k\|_\infty^{-\tau} \|k\|_1^{N+1} \\
&\leq \frac{M}{K(\omega)} \sum_{\|k\|_\infty = r} \|k\|_\infty^{-\tau} N^{N+1} \|k\|_\infty^{N+1} \\
&= \frac{M}{K(\omega)} N^{N+1} \sum_{\|k\|_\infty = r} \|k\|_\infty^{-\tau+(N+1)} \\
&= \frac{M}{K(\omega)} N^{N+1} \left(\sum_{\|k\|_\infty = r} 1 \right) r^{-\tau+(N+1)} \\
&= \frac{M}{K(\omega)} N^{N+1} C(r, N) r^{-\tau+(N+1)}
\end{aligned}$$

et en utilisant (2.21), on obtient

$$\sum_{\|k\|_\infty = r} \left| \frac{a_k}{\langle k, \omega\rangle} \right| \leq \frac{M}{K(\omega)} N^{N+1} C(N) r^{N-1} r^{-\tau+(N+1)}.$$

Ainsi on a prouvé que, pour tout $r \in \mathbb{N}_*$,

$$\sum_{\|k\|_\infty = r} \left| \frac{a_k}{\langle k, \omega \rangle} \right| \leq C_0(N) r^{-\tau + 2N}$$

où $C_0(N) = \frac{M}{K(\omega)} N^{N+1} C(N)$.

Par suite

$$\sum_{r=1} \sum_{\|k\|_\infty = r} \left| \frac{a_k}{\langle k, \omega \rangle} \right| \leq \sum_{r=1} C_0(N) r^{-\tau + 2N},$$

et si $\tau = s + 2(N+1)$, où $s \in \mathbb{N}_*$, alors on obtient

$$\sum_{r=1} \sum_{\|k\|_\infty = r} \left| \frac{a_k}{\langle k, \omega \rangle} \right| \leq C_0(N) \sum_{r=1} r^{-(s+2)} < \infty.$$

Ainsi la série $\sum_{k \neq 0} \frac{a_k}{\langle k, \omega \rangle} e^{i \langle k, u \rangle}$ converge absolument, et donc G est une fonction quasi-periodique. De plus, si f est de classe C^τ, alors G est de classe C^s.

□

2.4.2 Relations entre les fonctions périodiques et les fonctions quasi-périodiques

Soit $t \mapsto F(\omega_1 t, ..., \omega_N t)$ une fonction quasi-périodique telle que $\omega = (\omega_1, ..., \omega_N)$ satisfait (2.19). On considère la suite de nombres rationnnels r_j^i, $i = 1, ..., N$ telle que

$$\lim_{j \to \infty} r_j^i = \omega_i, \quad i = 1, ..., N. \tag{2.22}$$

Alors la fonction $t \mapsto F(r_j^1 t, ..., r_j^N t)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{r_j}$, où

$$r_j = \min \left\{ \sum_{i=1}^N n_i r_j^i \mid n_i \text{ est un entier}, \sum_{i=1}^N n_i r_j^i > 0 \right\}. \tag{2.23}$$

Inversement, on suppose que la fonction $t \mapsto F_j(t) = F_j(r_j^1 t, ..., r_j^N t)$ est périodique. Sous certaines conditions on peut trouver une sous-suite de fonctions $(F_{j_k}(t))_k$ de $(F_j(t))_j$ qui converge vers $t \mapsto F(\omega_1 t, ..., \omega_N t)$. Ceci fait l'objet du lemme suivant :

Lemme 2.3 *Soit $t \mapsto F_j(t) = \tilde{F}_j(r_j^1 t, ..., r_j^N t)$ une suite des fonctions périodiques de période $\frac{2\pi}{r_j}$, où r_j^i et r_j sont donnés par* (2.22) *et* (2.23). *Si de plus on suppose que $F_j \in C^\tau$ et que $\left\| F_j^{(i)}(t) \right\| \leq M$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $i = 0, ..., \tau$. Alors il existe une sous-suite $(F_{j_k})_k$ de $(F_j)_j$ telle que*

$$\lim_{k \to \infty} F_{j_k}(t) = \tilde{F}(\omega t) = F(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

où F est une fonction quasi-périodique et de classe C^s, avec $\tau = s + 2(N+1)$. De plus $\left\|D_u^h \tilde{F}(u)\right\| \leq M$, pour tout $h = (h_1, ..., h_N) \in \mathbb{N}^N$ tel que $\sum_{i=1}^N h_i \leq \tau$, pour tout $u \in \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$.

cf. ((2), (3, Lemme 2, page 203), (4, Lemme 4.2, page 133)).

Démonstration. F_j admet un développement en série de Fourier de la forme

$$F_j(t) = \sum_k a_k^j e^{i(k_1 r_j^1 + ... + k_N r_j^N)t},$$

où $k = (k_1, ..., k_N) \in \mathbb{Z}^N$. Par l'hypothèse $\left\|F_j^{(i)}\right\| \leq M$, $i = 0, ..., \tau$, et par le Lemme 2.2, on conclut que

$$|a_k^j| \leq M\|k\|_\infty^{-\tau}, \qquad \sum_{\|k\|_\infty = r} |a_k^j| \leq C_0(N) r^{-\tau+2N}$$

et donc il existe une sous-suite $(a_k^{j_s})_s$ de $(a_k^j)_j$ telle que

$$\lim_{s\to\infty} a_k^{j_s} = a_k \text{ et } \lim_{s\to\infty} F_{j_s}(t) = \sum a_k e^{i(k_1\omega_1 + ... + k_N\omega_N)t} = \tilde{F}(\omega t)$$

uniformément sur chaque intervalle borné. De plus, F est de classe C^τ. □

Les résultats de cette section sont dûs à Zhensheng Lin. Les démonstrations données par Lin étant très concises, nous donnons des démonstrations détaillées.

2.5 Exposants caractéristiques d'un système linéaire quasi-périodique

2.5.1 Exposants caractéristiques d'un système linéaire périodique

On considère le système linéaire T-périodique suivant :

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad A(t+T) = A(t). \tag{2.24}$$

Soit X la matrice fondamentale de (2.24), d'après (2.7) et (2.8) il existe une matrice constante B telle que :

$$X^{-1}(0)X(T) = e^{BT}. \tag{2.25}$$

On appelle les valeurs propres de B les exposants caratéristiques de Floquet de A. On note ces exposants par FL-CER.

Proposition 2.3 *(i) Les FL-CER de A sont indépendants du choix de la matrice fondamentale de (2.24).*

(ii) Les FL-CER *de A sont invariants par une transformation linéaire et T-périodique.*

Démonstration. (i) Soit $\tilde{X}$ une autre matrice fondamentale de (2.24). Alors d'après la Proposition 2.1, il existe une matrice constante D telle que

$$\tilde{X}(t) = X(t)D, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$\tilde{X}^{-1}(0)\tilde{X}(T) = D^{-1}X^{-1}(0)X(T)D = D^{-1}e^{BT}D = e^{(D^{-1}BD)T}.$$

Et puisque les valeurs propres de B et de $D^{-1}BD$ sont les mêmes, il résulte que les FL-CER de A sont indépendants du choix de la matrice fondamentale de (2.24).

(ii) Soit P une transformation linéaire périodique de période T. Si $Z(t) = P(t)X(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors

$$Z^{-1}(0)Z(T) = X^{-1}(0)P^{-1}(0)P(T)X(T) = X^{-1}(0)X(T).$$

Ainsi les FL-CER de A sont invariants par la transformation linéaire et T-périodique P.

□

2.5.2 Exposants caractéristiques d'un système linéaire quasi-périodique

Maintenant on va étendre la définition des exposants caractéristiques de Floquet des systèmes linéaires périodiques aux systèmes linéaires quasi-périodiques. Afin de prouver cette extension, on énonce le lemme suivant :

Lemme 2.4 *On considère le système linéaire quasi-périodique suivant :*

$$x'(t) = A(t)x(t) \tag{2.26}$$

de vecteur des fréquences $\omega = (\omega_1, ..., \omega_N)$ qui satisfait (2.19) *où A est de classe C^τ. Alors il existe une fonction à valeurs dans l'ensemble des matrices orthogonales $Q \in QP^0_\omega(\mathbb{M}(n, \mathbb{R}))$ telle que sous la transformation $z(t) = Q^{-1}(t)x(t)$, le système* (2.26) *se réduit à*

$$z'(t) = C(t)z(t), \tag{2.27}$$

où $C \in QP^0_\omega(\mathbb{M}(n, \mathbb{R}))$ une matrice triangulaire et de classe $C^{p\tau_0}$, et $p = \frac{1}{2}n(n+1)$ et $\tau_0 = 2(N+1)$.

Démonstration. On reprend la suite de nombres rationnels r_j^i définie par (2.22) et on considère le système suivant :

$$x'(t) = A_j(t)x(t), \tag{2.28}$$

où $A_j(t) = \tilde{A}(r_j^1 t, ..., r_j^N t)$, A_j est périodique de période $\frac{2\pi}{r_j}$.

Par le Lemme 2.3, il suit que

$$\lim_{j\to\infty} A_j(t) = A(t) = \tilde{A}(\omega_1 t, ..., \omega_N t)$$

uniformément sur chaque intervalle réel borné. Par suite si X_j est la matrice fondamentale de (2.28) telle que $X_j(0) = X(0)$, alors on a

$$\lim_{j\to\infty} X_j(t) = X(t) \tag{2.29}$$

uniformément sur chaque intervalle réel borné.

En utilisant le Lemme 2.1, on conclut qu'il existe une matrice orthogonale périodique Q_j de période $\frac{2\pi}{r_j}$, $j = 1, 2, ...$, qui est de classe $C^{\tau+1}$ telle que si on applique la transformation

$$z(t) = Q_j^{-1}(t)x(t)$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, au système (2.28), on obtient

$$z'(t) = C_j(t)z(t), \tag{2.30}$$

($\forall t \in \mathbb{R}$) où C_j est une matrice triangulaire supérieure, périodique de période $\frac{2\pi}{r_j}$ et est de classe C^τ.
De (2.14), il résulte que pout tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left.\begin{aligned} C_j(t) &= (Q_j^{-1})'(t)Q_j(t) + Q_j(t)A_j(t)Q_j(t) \\ C_j^*(t) &= Q_j^{-1}(t)Q_j'(t) + Q_j(t)A_j^*(t)Q_j(t) \end{aligned}\right\} \tag{2.31}$$

Maintenant, on va montrer que C_j et Q_j satisfont les mêmes conditions que celles de F_j dans le Lemme 2.3.

Tout d'abord, puisque $A_j(t) = \tilde{A}(r_j^1 t, ..., r_j^N t)$ et A_j est quasi-périodique, il existe une constante $M > 0$ telle que $\left\|A_j(t)\right\| \leq M$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi par le Lemme 2.1, il découle que $\left\|C_j(t)\right\| \leq 3M$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Et ceci entraîne, en considérant (2.31), que

$$\left\|(Q^{-1})'(t)\right\| \leq \left\|C_j(t)Q_j^{-1}\right\| + \left\|Q_j^{-1}(t)A_j(t)\right\| \leq 3M + M = 4M,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Et donc Q_j^{-1} est uniformément bornée.

Par un raisonnement similaire, on peut montrer que Q_j' est uniformément bornée.
Comme Q_j est orthogonale, et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (C_j(t) + C_j^*(t))' = \left(Q_j^{-1}(t)(A_j(t) + A_j^*(t))Q_j(t)\right)',$$

alors $C_j' + (C_j^*)'$ est aussi uniformément bornée.
Puisque C_j est triangulaire supérieure et rélle, il suit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\| C_j'(t) \right\| \leq \frac{1}{2} \left\| C_j'(t) + (C_j^*)'(t) \right\|.$$

Ainsi on conclut que C_j' est aussi uniformément bornée.

Ensuite, puisque A est de classe C^τ, A_j l'est aussi, on se procède par le même raisonnement que ci-dessus pour démontrer que $C_j^{(k)}$ et $Q_j^{(h)}$ sont uniformément bornées, où $k = 0, 1, ..., \tau$ et $h = 0, 1, ..., \tau + 1$.

Enfin, C_j et Q_j satisfont les conditions du Lemme 2.3 ; il en résulte qu'il existe $s \mapsto j_s$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\lim_{s\to\infty} Q_{j_s}(t) = Q(t), \quad \lim_{s\to\infty} C_{j_s}(t) = C(t)$$

uniformément sur chaque intervalle réel borné.

Maintenant, si on applique la transformation $z(t) = Q^{-1}(t)x(t)$ à (2.26), on obtient

$$z'(t) = C(t)z(t). \tag{2.32}$$

En effet, d'après (2.32) on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(Q_{j_s}^{-1})'(t)X_{j_s}(t) = C_{j_s}(t)Q_{j_s}^{-1}(t)X_{j_s}(t) - Q_{j_s}^{-1}(t)A_{j_s}(t)X_{j_s}(t),$$

où X_{j_s} est la matrice fondamentale de $X_{j_s}'(t) = A_{j_s}(t)X_{j_s}(t)$ telle que $X_{j_s}(0) = I$.

Donc

$$(Q_{j_s}^{-1})'(t)X_{j_s}(t) + Q_{j_s}^{-1}(t)X_{j_s}'(t) = C_{j_s}(t)Q_{j_s}^{-1}(t)X_{j_s}(t),$$

cela veut dire que

$$(Q_{j_s}^{-1}X_{j_s})'(t) = C_{j_s}(t)Q_{j_s}^{-1}(t)X_{j_s}(t).$$

En intégrant cette dernière équation, on obtient

$$Q_{j_s}^{-1}(t)X_{j_s}(t) = Q_{j_s}^{-1}(0) + \int_0^t C_{j_s}(r)Q_{j_s}^{-1}(r)X_{j_s}(r)dr. \tag{2.33}$$

On a vu que $(Q_{j_s}^{-1}(t))_s$, $(C_{j_s}(t))_s$ et $(X_{j_s}(t))_s$ convergent respectivement vers $Q(t)$, $C(t)$ et $X(t)$ uniformément sur chaque intervalle réel borné. Alors en faisant tendre $s \to \infty$ dans (2.33), on obtient

$$Q^{-1}(t)X(t) = Q^{-1}(0) + \int_0^t C(r)Q^{-1}(r)X(r)dr.$$

Ainsi si $Z(t) = Q^{-1}(t)X(t)$, alors

$$Z(t) = Q^{-1}(0) + \int_0^t C(r)Z(r)dr.$$

Ceci prouve que Z est une matrice fondamentale de (2.32) et par suite $z(t) = Q^{-1}(t)x(t)$ est solution de (2.32).

Finalement, puisque C_j est de classe C^τ, alors d'après le Lemme 2.3, C est de classe $C^{p\tau_0}$. $\square$

cf. ((2), (3), (4)).

Lemme 2.5 *Soit X une matrice fondamentale du système quasi-périodique* (2.26) *et soit $\delta_1(t), ..., \delta_n(t)$ les valeurs propres de $X^{-1}(0)X(t)$. Alors il existe des nombres $\beta_1, ..., \beta_n$ qui sont indépendants du choix de la matrice fondamentale tels que :*

$$\beta_i = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{t_j} \ln(\delta_i(t_j)), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{2.34}$$

où la suite de nombres réels $(t_j)_j$ satisfait la relation suivante :

$$\lim_{j\to\infty} (\omega_1 t_j, ..., \omega_N t_j) = (0, ..., 0) \quad (mod\ (2\pi)^N). \tag{2.35}$$

Démonstration. Par le Lemme 2.4, le système (2.26), sous $z(t) = Q^{-1}(t)x(t)$, se transforme au système triangulaire (2.32). Si X est une matrice fondamentale de (2.26), alors Z, définie par $Z(t) = Q^{-1}(t)X(t)$, est une matrice fondamentale de (2.32) et on a :

$$\begin{aligned} X^{-1}(0)X(t) &= Z^{-1}(0)Q^{-1}(0)Q(t)Z(t) \\ &= Z^{-1}(0)Q^{-1}(0)Q(t)Z(t)Z^{-1}(0)Z(0). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Ainsi $X^{-1}(0)X(t)$ est semblable à $Q^{-1}(0)Q(t)Z(t)Z^{-1}(0)$, donc elles possèdent les mêmes valeurs propres.

Maintenant, puisque Z est une matrice fondamentale de (2.32) alors on a d'une part

$$Z(t)Z^{-1}(0) = I + \int_0^t C(r)dr + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} C(t_1)C(t_2)dt_2 + ...$$

et d'autre part

$$Z(t) = Z(0) \exp\left(\int_0^t C(r)dr\right),$$

où

$$C(t) = \begin{pmatrix} c_{11}(t) & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

D'où

$$Z(t)Z^{-1}(0) = \begin{pmatrix} e^{\int_0^t c_{11}(r)dr} & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\int_0^t c_{nn}(r)dr} \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice a pour valeurs propres $\alpha_i(t) = e^{\int_0^t c_{ii}(r)dr}$, $i = 1, ..., n$. Puisque $t \mapsto Q(t) = \tilde{Q}(\omega_1 t, ..., \omega_N t)$ est quasi-périodique et que t_j satisfait (2.35), on conclut que

$$\lim_{j\to\infty} Q(t_j) = \lim_{j\to\infty} \tilde{Q}(\omega_1 t_j, ..., \omega_N t_j) = \tilde{Q}(0).$$

Ainsi,

$$Q(t_j) = Q(0) + o(Q(0))$$

et

$$Q^{-1}(0)Q(t_j) = I + o(1).$$

D'où, de l'égalité (2.36), on déduit que

$$X^{-1}(0)X(t_j) = Z^{-1}(0)(I + o(1))Z(t_j)Z^{-1}(0)Z(0).$$

Par suite, les valeurs propres de $X^{-1}(0)X(t_j)$ sont celles de $(I + o(1))Z(t_j)Z^{-1}(0)$ qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\delta_i(t_j) = (1 + o(1))e^{\int_0^{t_j} c_{ii}(r)dr}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Par conséquent, pour tout $i = 1, \cdots, n$,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{t_j} \ln(\delta_i(t_j)) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{t_j} \int_0^{t_j} c_{ii}(r)dr = \beta_i. \tag{2.37}$$

L'existence de ces β_i est assurée par le fait que les c_{ii} sont quasi-périodiques et de classe $C^{p\tau_0}$. Il est clair que ces β_i sont indépendants du choix de la matrice fondamentale. $\square$

Lemme 2.6 *Soit $A \in QP^0_\omega(\mathbb{M}(n, \mathbb{R}))$ de classe C^τ telle que ω satisfait* (2.19)*, et soit $b \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$. Alors le système linéaire quasi-périodique suivant :*

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{2.38}$$

est réductible en un système linéaire, triangulaire et quasi-périodique

$$z'(t) = C(t)z(t) + d(t), \tag{2.39}$$

où $C \in QP^0_\omega(\mathbb{M}(n, \mathbb{R}))$ une matrice triangulaire et $d \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. On considère la transformation Q provenant du Lemme 2.4 et on effectue la transformation $z(t) = Q^{-1}(t)x(t)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} z'(t) &= (Q^{-1})'(t)x(t) + Q^{-1}(t)x'(t) \\ &= (Q^{-1})'(t)Q(t)z(t) + Q^{-1}(t)[A(t)Q(t)z(t) + b(t)] \\ &= [(Q^{-1})'Q(t) + Q^{-1}(t)A(t)Q(t)]z(t) + Q^{-1}(t)b(t) \\ &= C(t)z(t) + d(t), \end{aligned}$$

où

$$C(t) = (Q^{-1})'Q(t) + Q^{-1}(t)A(t)Q(t)$$

et

$$d(t) = Q^{-1}(t)b(t),$$

pour tout $\in \mathbb{R}$.

Notons que par le Lemme 2.4, C est une matrice triangulaire dans $QP^0_\omega(\mathbb{M}(n,\mathbb{R}))$ et est de classe C^τ et $Q \in QP^1_\omega(GL(n,\mathbb{R}))$. Par conséquent $d \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$, car ses coordonnées sont des produits scalaires de deux fonctions de $QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$. □

Définition 2.2 *Les constantes β_i, $i = 1, \cdots, n$, définies par* (2.37) *sont appelées les exposants caractéristiques de Floquet du système* (2.26) *(ou de A). On les note par* FL-CER *de* (2.26) *(ou de A) .*

2.5.3 Théorie de Floquet pour les systèmes linéaires quasi-périodiques.

Dans les sections précédentes, on a vu que le système (2.26) se réduit à un système linéaire, triangulaire et quasi-périodique (2.27). Dans cette section, on montrera que sous certaines conditions, (2.27) se réduit à un système linéaire constant. Et donc (2.26) est réductible à un système linéaire constant. Pour cela, en plus de la condition diophantienne, pour éviter le problème des petits diviseurs qui apparaitra, on aura besoin que la condition suivante soit satisfaite :

$$\left| i\sum_{j=1}^{N} k_j\omega_j + \sum_{s=1}^{N} m_s\beta_s \right| \geq K(\omega,\beta)(1+\|k\|)^{N+1}, \tag{2.40}$$

où $k = (k_1, \cdots, k_N) \in \mathbb{Z}^N$, $m = (m_1, \cdots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ tels que

$$\left|\sum_{s=1}^{N} m_s\right| \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{s=1}^{N} |m_s| \leq 2,$$

$K(\omega,\beta)$ est une constante strictement positive et $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ sont les

exposants caractéristiques de Floquet.

Théorème 2.2 *Soit $A \in QP^0_\omega(\mathbb{M}(n,\mathbb{R}))$ de classe C^τ tel que ω satisfait* (2.19) *et les* FL-CER *$\beta_1, \cdots, \beta_n$ de A satisfont* (2.40) *et soit $b \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$. Alors le système*

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{2.41}$$

est réductible, c'est-à-dire, il existe une transformation linéaire quasi-périodique qui transforme (2.41) *à un système linéaire à coefficients constants*

$$y'(t) = \Omega y(t) + e(t), \tag{2.42}$$

où $\Omega \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ est constante et $e \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$. De plus, les valeurs propres de A sont exactement les FL-CER *de A.*

Démonstration. Par le Lemme 2.6, il existe une transformation $Q \in QP^1_\omega(GL(n,\mathbb{R})$ telle que si $z(t) = Q^{-1}(t)x(t)$, le système (2.41) se réduit au système suivant :

$$y'(t) = C(t)y(t) + d(t), \tag{2.43}$$

où C est une matrice triangulaire supérieure dans $QP^0_\omega(\mathbb{M}(n,\mathbb{R}))$, de classe C^τ et $d \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$. Il reste à montrer que le système (2.43) se réduit en un système à coefficients constants.

Tout d'abord, (2.43) s'écrit comme suit :

$$\left.\begin{array}{lll} z_1'(t) = c_{11}z_1(t)+ & c_{12}(t)z_2(t) + \cdots + c_{1n}(t)z_n(t) + d_1(t) \\ z_2'(t) = & c_{22}(t)z_2(t) + \cdots + c_{2n}(t)z_n(t) + d_2(t) \\ \cdots & \cdots \\ z_n'(t) = & \qquad\qquad\qquad c_{nn}(t)z_n(t) + d_n(t) \end{array}\right\}. \tag{2.44}$$

Pour montrer la réductibilité de (2.44), on procède par récurrence inverse sur k, l'ordre du système (2.44). c'est à dire on raisonne pour $k \in \{1, ..., n\}$ sur le système :

$$\left.\begin{array}{lll} z_k'(t) = c_{kk}z_k(t)+ & c_{k,k+1}(t)z_{k+1}(t) + \cdots + c_{kn}(t)z_n(t) + d_k(t) \\ z_{k+1}'(t) = & c_{k+1,k+1}(t)z_{k+1}(t) + \cdots + c_{k+1,n}(t)z_n(t) + d_{k+1}(t) \\ \cdots & \cdots \\ z_n'(t) = & \qquad\qquad\qquad c_{nn}(t)z_n(t) + d_n(t) \end{array}\right\} (E)$$

- On initialise à $k = n$.
- On fait l'hypothèse de récurrence sur $k + 1$ ($k < n$).
- On vérifie l'assertion pour k.

<u>Première étape : $k = n$.</u> Ainsi la dernière équation de (2.44) est la suivante :

$$z_n'(t) = c_{nn}(t)z_n(t) + d_n(t), \tag{2.45}$$

qui a pour solution z_n définie par :

$$z_n(t) = e^{\int_0^t c_{nn}(r)dr}\left(z_n(0) + \int_0^t e^{\int_0^s c_{nn}(r)dr} d_n(s)\, ds\right).$$

Puisque $C \in QP^0_\omega(\mathbb{M}(n,\mathbb{R}))$ et est de classe $C^{p\tau_0}$, alors $C - \mathcal{M}\{C\}$ satisfait les hypothèses du Lemme 2.2 et par conséquent, la fonction $t \mapsto \int_0^t (C(r) - \mathcal{M}\{C\})dr$ appartient à $QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$. Donc si on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_j(t) = c_{jj}(t) - \beta_j,$$

alors la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_j(t) = \int_0^t f_j(r)\, dr,$$

appartient à $QP^0_\omega(\mathbb{R})$, pour tout $j = 1, \cdots, n$. Donc

$$z_n(t) = e^{\beta_n t + g_n(t)} \left(z_n(0) + \int_0^t e^{\beta_n s + g_n(s)} d_n(s)\, ds \right).$$

Nous considérons la transformation suivante

$$y_n(t) = z_n(t) e^{-g_n(t)},$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Moyennant (2.45), on obtient

$$\begin{aligned} y_n'(t) &= (c_{nn}(t) z_n(t) + d_n(t)) e^{-g_n(t)} - f_n(t) e^{-g_n(t)} z_n(t) \\ &= (c_{nn}(t) - f_n(t)) e^{-g_n(t)} z_n(t) + e^{-g_n(t)} d_n(t) \\ &= \beta_n e^{-g_n(t)} z_n(t) + e^{-g_n(t)} d_n(t) \\ &= \beta_n y_n(t) + e_n(t), \end{aligned}$$

où $e_n(t) = d_n(t) e^{-g_n(t)}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
On voit que $e_n \in QP^0_\omega(\mathbb{R})$ comme produit de deux fonctions dans $QP^0_\omega(\mathbb{R})$.

Deuxième étape. Hypothèse de récurrence en $k+1$.
On suppose qu'il existe une matrice $J_{k+1} \in QP^0_\omega(\mathbb{M}(n-k, \mathbb{R}))$ qui est régulière triangulaire telle que si

$$\begin{pmatrix} y_{k+1}(t) \\ y_{k+2}(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = J_{k+1}(t) \begin{pmatrix} z_{k+1}(t) \\ z_{k+1}(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}, \tag{2.46}$$

alors

$$\begin{pmatrix} y'_{k+1}(t) \\ y'_{k+2}(t) \\ \vdots \\ y'_n(t) \end{pmatrix} = \Omega_{k+1} \begin{pmatrix} y_{k+1}(t) \\ y_{k+2}(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} + e_{k+1}(t), \tag{2.47}$$

où

$$\Omega_{k+1}(t) = \begin{pmatrix} \beta_{k+1} & & & * \\ & \beta_{k+2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_n \end{pmatrix}, \quad e_{k+1}(t) = \begin{pmatrix} d_{k+1}(t) \\ d_{k+2}(t) \\ \vdots \\ d_n(t) \end{pmatrix}.$$

$\Omega_{k+1} \in \mathbb{M}(n-k, \mathbb{R})$ est une matrice constante.

Troisième étape. On montrera qu'il existe $\Omega_k \in \mathbb{M}(n-k+1, \mathbb{R})$ constante et $e_k \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^{n-k+1})$ vérifiant (2.46) et (2.47).
Moyennant (E) et (2.46), on obtient

$$\begin{aligned} z_k'(t) &= c_{kk}(t) z_k(t) + c_{k,k+1}(t) z_{k+1}(t) + \cdots + c_{kn}(t) z_n(t) + d_k(t) \\ &= c_{kk}(t) z_k(t) + s_{k+1}(t) y_{k+1}(t) + \cdots + s_n(t) y_n(t) + d_k(t), \end{aligned}$$

où

$$(s_{k+1}(t), \cdots, s_n(t)) = (c_{k,k+1}(t), \cdots, c_{k,n}(t)) J_{k+1}^{-1}(t),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi on a

$$\begin{aligned}
(z_k(t)e^{-g_k(t)})' &= (c_{kk}(t)z_k(t) + s_{k+1}(t)y_{k+1}(t) + \cdots + s_n(t)y_n(t) \\
&+ d_k(t))e^{-g_k(t)} - f_k(t)e^{-g_k(t)}z_k(t) \\
&= (c_{kk}(t) - f_k(t))e^{-g_k(t)}z_k(t) + (s_{k+1}(t)y_{k+1}(t) \\
&+ \cdots + s_n(t)y_n(t) + d_k(t))e^{-g_k(t)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
(z_k(t)e^{-g_k(t)})' = \beta_k e^{-g_k(t)}z_k(t) + (s_{k+1}(t)y_{k+1}(t) \\
+ \cdots + s_n(t)y_n(t) + d_k(t))e^{-g_k(t)}.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Maintenant, soit $H(t) = (h_{k+1}(t), \cdots, h_n(t)) \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^{n-k})$. En considérant la transformation

$$y_k(t) = z_k(t)e^{-g_k(t)} + H(t)\vec{y}_0(t), \quad \vec{y}_0(t) = \begin{pmatrix} y_{k+1}(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \tag{2.49}$$

et en utilisant (2.47) et (2.48), on obtient

$$\begin{aligned}
y'_k(t) &= (z_k(t)e^{-g_k(t)})' + H'(t)\vec{y}_0(t) + H(t)\vec{y}'_0(t) \\
&= \beta_k e^{-g_k(t)}z_k(t) + [s_{k+1}(t)y_{k+1}(t) + \cdots + s_n(t)y_n(t) + d_k(t)]e^{-g_k(t)} \\
&+ H'(t)\vec{y}_0(t) + H(t)(\Omega_{k+1}\vec{y}_0(t) + e_{k+1}(t)) \\
&= \beta_k(y_k(t) - H(t)\vec{y}_0(t)) + e^{-g_k(t)}(s_{k+1}(t), \cdots, s_n(t))\vec{y}_0(t) \\
&+ e^{-g_k(t)}d_k(t) + H'(t)\vec{y}_0(t) + H(t)(\Omega_{k+1}\vec{y}_0(t) + e_{k+1}(t)).
\end{aligned}$$

Et par suite,

$$y'_k(t) = \beta_k y_k(t) + K(t)\vec{y}_0(t) + d_k(t)e^{-g_k(t)} + H(t)e_{k+1}(t), \tag{2.50}$$

où

$$K(t) = H'(t) - \beta_k H(t) + H(t)\Omega_{k+1}(t) + D(t)$$

et

$$D(t) = (s_{k+1}(t), \cdots, s_n(t)),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence (2.46), la transformation (2.49) s'écrit :

$$\begin{aligned}
y_k(t) &= z_k(t)e^{-g_k(t)} + H(t)J_{k+1}(t) \begin{pmatrix} z_{k+1}(t) \\ z_{k+2}(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} \\
&= \left(e^{-g_k(t)}; H(t)J_{k+1}(t)\right) \begin{pmatrix} z_k(t) \\ z_{k+1}(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ceci, avec (2.46), implique que

$$\begin{pmatrix} y_k(t) \\ y_{k+1}(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-g_k(t)} & H(t)J_{k+1}(t) \\ 0 & J_{k+1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_k(t) \\ z_{k+1}(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire

$$y(t) = J_k(t)z(t)$$

où

$$J_k(t) = \begin{pmatrix} e^{-g_k(t)} & H(t)J_{k+1}(t) \\ 0 & J_{k+1}(t) \end{pmatrix}.$$

Il est clair que J_k est matrice régulière, triangulaire et quasi-périodique car J_{k+1} l'est aussi. Donc pour conclure, il reste à montrer que

$$y'(t) = \Omega_k y(t) + e_k(t), \tag{2.51}$$

où Ω_k est une matrice constante d'ordre $n-k+1$ et $e_k \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^{n-k+1})$.

De (2.47) et (2.50), on déduit que

$$\begin{pmatrix} y'_k(t) \\ y'_{k+1}(t) \\ \vdots \\ y'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_k & K \\ 0 & \Omega_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_k(t) \\ y_{k+1}(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H(t)e_{k+1}(t) + e^{-g_k(t)}d_k(t) \\ e_{k+1}(t) \end{pmatrix}.$$

D'où (2.51) est obtenue pour :

$$\Omega_k = \begin{pmatrix} \beta_k & K \\ 0 & \Omega_{k+1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_k(t) = \begin{pmatrix} H(t)e_{k+1}(t) + e^{-g_k(t)}d_k(t) \\ e_{k+1}(t) \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $e_k \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^{n-k+1})$. En effet, $e_{k+1} \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^{n-k})$, $H \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^{n-k})$, $d_k \in QP^0_\omega(\mathbb{R})$ et $e^{-g_k} \in QP^0_\omega(\mathbb{R})$ puisque $g_k \in QP^0_\omega(\mathbb{R})$. Par conséquent, $He_{k+1} + e^{-g_k}d_k \in QP^0_\omega(\mathbb{R})$. Ceci entraîne que $e_k \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^{n-k+1})$.

Pour que Ω_k soit constante, il faut et il suffit que K soit un vecteur constant $\sigma = (\sigma_{k+1}, \cdots, \sigma_n)$. C'est-à-dire il faut et il suffit de prouver qu'il existe un vecteur $H \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^{n-k})$ qui soit solution de l'équation différentielle suivante :

$$H'(t) = \beta_k H(t) - H(t)\Omega_{k+1} - D(t) + \sigma. \tag{2.52}$$

Dans ce qui suit, on prouvera l'existence d'un tel H.

D'après le Lemme 2.4, c_{kk} est de classe $C^{p\tau_0}$, donc $f_k = c_{kk} - \beta_k$ est aussi de classe $C^{p\tau_0}$, et d'après le Lemme 2.2, g_k et $J_k = e^{-g_k}$ sont de classe $C^{(p-1)\tau_0}$, $p = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Puisque J_{k+1} est une matrice triangulaire, alors le nombre de ses coefficients non nuls est inférieur ou égal à $\frac{1}{2}(n-k)(n-k-1)$, et ces coefficients sont obtenus en intégrant les coefficients de C pas plus que $\frac{1}{2}(n-k)(n-k-1)$ fois. Il en résulte par le Lemme 2.2 que J_{k+1} est de classe $C^{p\tau_0-\frac{1}{2}(n-k)(n-k-1)\tau_0}$. Avec $p-\frac{1}{2}(n-k)(n-k-1)=\frac{1}{2}(-k^2+(2n-1)k+2n)$.
Et puisque $2 \leq k+1 \leq n$, il suit que :

$$\frac{1}{2}(-k^2+(2n-1)k+2n) \geq \frac{1}{2}(-(n+1)^2+2(2n+1)+2n) \geq n.$$

Ainsi, J_{k+1} est de classe $C^{n\tau_0}$. Par suite

$$D=(s_{k+1},\cdots,s_n)=(c_{k,k+1},\cdots,c_{kn})J_{k+1}^{-1}$$

est de classe $C^{n\tau_0}$ et donc la valeure moyenne $\mathcal{M}\{D^*\}$ de D^* existe,

$$\mathcal{M}\{D^*\}=\lim_{t\to\infty}\int_0^t D^*(r)dr=\begin{pmatrix}\sigma_{k+1}\\ \vdots\\ \sigma_n\end{pmatrix}.$$

Soit

$$D_0(t)=\begin{pmatrix}\sigma_{k+1}\\ \vdots\\ \sigma_n\end{pmatrix}-D^*(t)=\begin{pmatrix}d_{k+1}(t)\\ \vdots\\ d_n(t)\end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que la valeur moyenne de D_0 est nulle. Donc (2.52) s'écrit comme suit :

$$(H^*)'(t)=(\beta_k I-\Omega_{k+1}^*)H^*(t)+D_0(t). \tag{2.53}$$

On procède par récurrence sur j, la dimension de H, pour monter l'existence de H.

Première étape : $j=k+1$. Donc (2.53) est la suivante :

$$h_{k+1}'(t)=(\beta_k-\beta_{k+1})h_{k+1}(t)+d_{k+1}(t). \tag{2.54}$$

Puisque D est de classe $C^{n\tau_0}$ et $\mathcal{M}\{D_0\}=0$, alors d_{k+1} est aussi de classe $C^{n\tau_0}$, $\mathcal{M}\{d_{k+1}\}=0$ et $d_{k+1}\in QP_\omega^0(\mathbb{R})$, donc d_{k+1} peut être exprimée sous la forme d'une série de Fourier comme suit

$$d_{k+1}(t)=\sum_{l\neq 0} d_{k+1,l}e^{i\langle l,\omega\rangle t}.$$

Et par (2.54), on obtient

$$\begin{aligned}\left(h_{k+1}(t)e^{-(\beta_k-\beta_{k+1})t}\right)' &= h_{k+1}'(t)e^{-(\beta_k-\beta_{k+1})t}-(\beta_k-\beta_{k+1})h_{k+1}(t)e^{-(\beta_k-\beta_{k+1})t}\\ &= \left((\beta_k-\beta_{k+1})h_{k+1}(t)+d_{k+1}(t)\right)e^{-(\beta_k-\beta_{k+1})t}\\ &\quad -(\beta_k-\beta_{k+1})h_{k+1}(t)e^{-(\beta_k-\beta_{k+1})t}\\ &= d_{k+1}(t)e^{-(\beta_k-\beta_{k+1})t}\\ &= \sum_{k\neq 0} d_{k+1,l}e^{i\langle l,\omega\rangle t-(\beta_k-\beta_{k+1})t}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} h_{k+1}(t) &= \left(\sum_{l \neq 0} \frac{d_{k+1,l} e^{i\langle l,\omega\rangle t - (\beta_k - \beta_{k+1})t}}{i\langle l,\omega\rangle - (\beta_k - \beta_{k+1})} \right) e^{(\beta_k - \beta_{k+1})t} \\ &= \sum_{l \neq 0} \frac{d_{k+1,l} e^{i\langle l,\omega\rangle t}}{i\langle l,\omega\rangle - (\beta_k - \beta_{k+1})}. \end{aligned}$$

En utilisant (2.40), le fait que d_{k+1} est de classe $C^{n\tau_0}$ et en effectuant un raisonnement similaire à celui de la preuve du Lemme 2.20, on conclut que $h_{k+1} \in QP^0_\omega(\mathbb{R})$ et est de classe $C^{(n-1)\tau_0}$.

Deuxième étape : On suppose que pour $j = k+1, \cdots, n-1$, il existe $h_{k+1}, \cdots, h_j$ dans $QP^0_\omega(\mathbb{R})$, qui sont de classe $C^{(n-j+1)\tau_0}$ dont les valeurs moyennes sont nulles.

Troisième étape : Par (2.53), on obtient :

$$h'_{j+1}(t) = (\beta_k - \beta_{j+1}) h_j(t) + \bar{d}_{j+1}(t), \tag{2.55}$$

où

$$\bar{d}_{j+1}(t) = -\sum_{l=k+1}^{j} \alpha_{l,j+1} h_l(t) + d_{j+1}(t),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et où $\alpha_{l,j+1}$ désigne le coefficient à la $j+1$-ième ligne et la l-ième colonne de Ω_{n-1}.

Puisque $D \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^{n-k})$ et est de classe $C^{n\tau_0}$, alors $d_l \in QP^0_\omega(\mathbb{R})$ est aussi de classe $C^{n\tau_0}$ et, d'après l'hypothèse de la récurrence, $h_l \in QP^0_\omega(\mathbb{R})$ et est de classe $C^{(n-l+1)\tau_0}$, donc $\bar{d}_{j+1} \in QP^0_\omega(\mathbb{R})$ et est de classe $C^{(n-j+1)\tau_0}$, i.e. $\bar{d}_{j+1}$ est de classe $C^{(n-j+1)\tau_0}$. De plus $\mathcal{M}\{\bar{d}_{j+1}\} = 0$, puisque $\mathcal{M}\{h_l\} = 0$ pour $l = k+1, \cdots, j$ et $\mathcal{M}\{d_{j+1}\} = 0$. Ainsi en utilisant le même raisonnement que dans la première étape, on conclut qu'il existe $h_{j+1} \in QP^0_\omega(\mathbb{R})$ solution de (2.55) telle que h_{j+1} est de classe $C^{(n-j)\tau_0}$ et $\mathcal{M}\{h_{j+1}\} = 0$.
Ceci prouve l'existence de $H \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^{n-k})$ qui vérifie (2.52), ce qui achève la preuve du théorème. □

2.6 UN RÉSULTAT D'EXISTENCE : CAS LINÉAIRE

Dans cette section, nous donnons des conditions qui assurent l'existence d'une unique solution quasi-périodique de l'équation :

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t), \tag{2.56}$$

Tout d'abord on rappelle un résultat classique, dû à Bohr et Neugebauer, pour les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants. cf. (6).

Théorème 2.3 *Soit $\Omega \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ telle que les parties réelles de ses valeurs propres sont non nulles. Alors pour tout $d \in AP^0(\mathbb{R}^n)$, il existe un unique $z_d \in AP^1(\mathbb{R}^n)$ qui est solution de l'équation différentielle suivante*

$$z'(t) = \Omega z(t) + d(t).$$

De plus, il existe une constante $\alpha \in]0,\infty[$ telle que

$$\|z_d\|_\infty \leq \alpha.\|d\|_\infty$$

pour tout $d \in AP^0(\mathbb{R}^n)$.

Définition 2.3 *On appelle ainsi constante de Bohr-Neugebauer la plus petite constante α qui satisfait la dernière assertion dans le Théorème 2.3 de Bohr-Neugebauer.*

Lemme 2.7 *Soit $A \in QP^0_\omega(\mathbb{M}(n,\mathbb{R}))$ de classe C^τ telle que ω satisfait* (2.19) *et* (2.40). *On suppose de plus que la condition suivante est verifiée*

$$\text{Les FL-CER} \quad \beta_1,...,\beta_n \quad \text{de } A \text{ sont non nuls.} \tag{2.57}$$

Alors pour tout $b \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$ il existe un unique $y_b \in QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)$ qui est solution de (2.56). *De plus il existe une constante $\gamma \in]0,\infty[$ telle que*

$$\|y_b\|_\infty \leq \gamma\|b\|_\infty$$

pour tout $b \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Du Théorème 2.2, on déduit qu'il existe $S \in QP^1_\omega(GL(n,\mathbb{R}))$ et $\Omega \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ telles que en posant $d(t) = S^{-1}(t)b(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, et en effectuant la transformation $y(t) = S(t)z(t)$, le système (2.56) devient équivalent à

$$z'(t) = \Omega z(t) + d(t). \tag{2.58}$$

Puisque les valeurs propres de Ω sont les FL-CER de A, alors la condition (2.57) nous permet d'utiliser le thórème de Bohr-Neugebauer pour affirmer qu'il existe un unique $z_d \in QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)$ solution de (2.58). Par conséquent $y_b(t) = S(t)z_d(t)$ appartient à $QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)$ est

$$y_b'(t) = A(t)y_b(t) + b(t).$$

Ainsi l'existence est prouvée.

Si $y \in QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)$ satisfait aussi $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, en posant $z(t) = S(t)^{-1}y(t)$, on vérifie que $z'(t) = Cz(t) + d(t)$ et l'unicité provenant du théorème de Bohr-Neugebauer implique que $z = z_d$ et donc $y = y_b$. D'où l'unicité est prouvée.

Maintenant, soit α la constant de Bohr-Neugebauer de C. Puisque S et $S^{-1} = [t \mapsto S(t)^{-1}]$ sont quasi-périodiques, alors elles sont bornées sur $\mathbb{R}$, et par conséquent on obtient :

$$\begin{aligned}\|y_b\|_\infty = \|Sz_d\|_\infty &\leq \|S\|_\infty.\|z_d\|_\infty \\ &\leq \|S\|_\infty \alpha \|d\|_\infty = \|S\|_\infty \alpha \|S^{-1}b\|_\infty \\ &\leq \|S\|_\infty \alpha \|S^{-1}\|_\infty \|b\|_\infty,\end{aligned}$$

et donc il suffit de prendre $\gamma = \|S\|_\infty \alpha \|S^{-1}\|_\infty$. □

Définition 2.4 *On appelle constante de Bohr-Neugebauer de A la plus petite constante γ qui satisfait la dernière assertion du Lemma 2.7.*

2.7 Un résultat d'existence : cas non linéaire

Dans cette section, on obtient un résultat original d'existence en utilisant le théorème de Z. Lin et le théorème de point fixe de Picard-Banach.

Théorème 2.4 *Soit $A \in QP^0_\omega(M(n, \mathbb{R}))$ de classe C^τ et $f \in QPU_\omega(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On suppose que (2.19), (2.40) et (2.57) sont satisfaites et que aussi f remplie la condition suivante :*

$$\left.\begin{array}{l}\text{Il existe } c \in]0, (\|A\|\gamma + 1 + \gamma)^{-1}[\text{ tel que} \\ \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq c\|x - y\| \\ \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n.\end{array}\right\} \tag{2.59}$$

où γ est la constante de Bohr-Neugebauer de A. Alors l'équation

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t)) \tag{2.60}$$

possède une unique solution dans $QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. On considère l'opérateur linéaire $L : QP^1_\omega(\mathbb{R}^n) \longrightarrow QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$ défini par $Lx = [t \mapsto x'(t) - A(t)x(t)]$. En utilisant le Lemme 2.7, on conclut que L est inversible, et pour tout $b \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$, $L^{-1}(b) = x_b$ est l'unique solution de $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ dans $QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)$.

En utilisant la constante de Bohr-Neugebauer, on sait que $\|x_b\|_\infty \leq \gamma\|b\|_\infty$, et de plus on a $\|x_b'\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|x_b\|_\infty + \|b\|_\infty \leq (\|A\|_\infty \gamma + 1)\|b\|_\infty$. Et donc on obtient $\|L^{-1}(b)\|_{C^1} \leq (\|A\|_\infty \gamma + 1 + \gamma)\|b\|_\infty$, ce qui implique l'inégalité suivante pour la norme de l'opérateur inverse :

$$\|L^{-1}\|_{\mathcal{L}} \leq \|A\|_\infty \gamma + 1 + \gamma. \tag{2.61}$$

Rappelons par la Remarque 1.2 que si $x \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$ il existe $\varphi \in C^0(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}^n)$ telle que $x(t) = \varphi(t\omega)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Puisque $f \in$

$QPU_{\omega}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, en utilisant le Théorème 1.11, on déduit qu'il existe $F \in C^0(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que $f(t,x) = F(t\omega, x)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Il est clair que la fonction ψ, définie par $\psi(\theta) = F(\theta, \varphi(\theta))$ pour tout $\theta \in \mathbb{T}^N$, appartient à $C^0(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}^n)$ comme une composition de fonctions continues. Par conséquent, on a $[t \mapsto f(t, x(t)) = \psi(t\omega)] \in QP^0_{\omega}(\mathbb{R}^n)$.
Et ainsi l'opérateur de superposition construit sur f, $N_f : QP^0_{\omega}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow QP^0_{\omega}(\mathbb{R}^n)$, $N_f(x) = [t \mapsto f(t, x(t))]$, est bien défini.
Par l'hypothèse (2.59), il est facile d'obtenir l'inégalité suivante :

$$\|N_f(x) - N_f(y)\|_{\infty} \leq c\|x - y\|_{\infty} \tag{2.62}$$

pour tout $x, y \in QP^0_{\omega}(\mathbb{R}^n)$.

Par conséquent, en posant $c_1 = c(\|A\|_{\infty}\gamma + 1 + \gamma)^{-1}$, on obtient $c_1 \in]0,1[$ et en utilisant (2.61) et (2.62), on obtient l'inégalité suivante :

$$\|L^{-1} \circ N_f(x) - L^{-1} \circ N_f(y)\|_{\infty} \leq c_1\|x - y\|_{\infty}$$

pour tout $x, y \in QP^0_{\omega}(\mathbb{R}^n)$.

Et donc l'opérateur $L^{-1} \circ N_f : QP^0_{\omega}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow QP^0_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ est une contraction. Alors en utilisant le théorème du point fixe de Picard-Banach, on conclut qu'il existe un unique $x \in QP^0_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ tel que $L^{-1} \circ N_f(x) = x$.

On note que, pour $x \in QP^0_{\omega}(\mathbb{R}^n)$, $L^{-1} \circ N_f(x) = x$ équivaut à dire que x est une solution de (2.60) dans $QP^1_{\omega}(\mathbb{R}^n)$, et donc le théorème est prouvé. □

2.8 Un résultat de dépendance continue

Dans cette section on établit l'existence et l'unicité de solutions quasi-périodiques de l'équation (2.2) et un résultat de dépendance continue par rapport à la fonction paramètre u.

Tout d'abord on rappelle le théorème de points fixes paramétrés qui est établi dans (7, p.103).

Théorème 2.5 *(Points Fixes Paramétrés) Soit E un espace métrique complet, Λ un espace topologique et $\phi : E \times \Lambda \longrightarrow E$ une application qui satisfait les deux propriétés suivantes :*

$$\textit{Pour tout } x \in E,\ \lambda \mapsto \phi(x, \lambda) \textit{ est continue de } \Lambda \textit{ dans } E. \tag{2.63}$$

et

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Il existe } k \in]0,1[\textit{ tel que,} \\ \textit{pour tout } \lambda \in \Lambda \textit{ et pour tout } x, y \in E, \\ d(\phi(x,\lambda), \phi(y,\lambda)) \leq k.d(x,y). \end{array}\right\} \tag{2.64}$$

Alors, pour tout $\lambda \in \Lambda$, notant par $a[\lambda]$ l'unique point fixe de l'application partielle $\phi(.,\lambda)$, l'application $\lambda \mapsto a[\lambda]$ est continue de Λ dans E.

Théorème 2.6 *Soit $A \in QP^0_\omega(M_n(\mathbb{R}))$ et $g \in QPU_\omega(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. On suppose que (2.19), (2.40) and (2.57) sont verifiées, et γ est la constante de Bohr-Neugebauer. On suppose aussi que la condition suivante est satisfaite.*

$$\left.\begin{array}{l} \text{Il existe } d \in]0, (\|A\|_\infty \gamma + 1 + \gamma)^{-1}[\\ \text{tel que } \|g(t,x,u) - g(t,y,u)\| \le d.\|x-y\| \\ \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ et pour tout } u \in \mathbb{R}^p. \end{array}\right\} \tag{2.65}$$

Alors, pour tout $u \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^p)$ il existe une unique solution $\mathfrak{X}[u] \in QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)$ de (2.2), et de plus l'application $u \mapsto \mathfrak{X}[u]$ est continue de $QP^0_\omega(\mathbb{R}^p)$ dans $QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. On considère l'opérateur L défini dans la preuve de Théorème 2.4. En utilisant sur g des arguments similaires à ceux utilisés sur f dans la preuve du Théorème 2.4, on obtient que l'opérateur de superposition $N_g : QP^0_\omega(\mathbb{R}^n) \times QP^0_\omega(\mathbb{R}^p) \longrightarrow QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$, $N_g(x,u) = [t \mapsto g(t, x(t), u(t))]$, est bien défini. En utilisant (2.65) on vérifie facilement que la propriété suivante est vraie :

$$\|N_g(x,u) - N_g(y,u)\|_\infty \le d.\|x-y\|_\infty \tag{2.66}$$

pour tout $x, y \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $u \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$.

On définit l'opérateur non linéaire $\phi : QP^0_\omega(\mathbb{R}^n) \times QP^0_\omega(\mathbb{R}^p) \longrightarrow QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$ en posant $\phi(x,u) = L^{-1} \circ N_g(x,u)$ pour tout $(x,u) \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^n) \times QP^0_\omega(\mathbb{R}^p)$.

Avec $E = QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$ et $\Lambda = QP^0_\omega(\mathbb{R}^p)$, en utilisant (2.61) and (2.66) en posant $k = d.(\|A\|_\infty \gamma + 1 + \gamma) \in]0,1[$, on voit que ϕ satisfait (2.64). En utilisant le Théorème 4, on conclut que $N^1_g : AP^0(\mathbb{R}^n) \times AP^0(\mathbb{R}^p) \longrightarrow AP^0(\mathbb{R}^n)$, $N^1_g(x,u) = [t \mapsto g(t, x(t), u(t))]$, est continu, et comme N_g est une restriction de N^1_g, alors N_g est aussi continu. Puisque L^{-1} est linéaire continu, ϕ est continu comme composition d'opérateurs continus, et par conséquent l'opérateur partiel $u \mapsto \phi(x,u)$ est continu pour tout $x \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$, et ainsi ϕ satisfait (2.63).

Maintenant on peut utiliser le Théorème de points fixes paramétrés, et on peut affirmer que, pour tout $u \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^p)$ il existe un unique $\mathfrak{X}[u] = L^{-1} \circ N_g(\mathfrak{X}[u], u)$, et de plus l'application $u \mapsto \mathfrak{X}[u]$ est continue de $QP^0_\omega(\mathbb{R}^p)$ dans $QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$.

Dire que $\mathfrak{X}[u]$ satisfait l'équation $\mathfrak{X}[u] = L^{-1} \circ N_g(\mathfrak{X}[u], u)$ est équivalent à dire que $\mathfrak{X}[u] \in QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)$ et $\mathfrak{X}[u]$ est une solution de (2.2).

On note que $\mathfrak{X}'[u](t) = A(t)\mathfrak{X}[u](t) + g(t, \mathfrak{X}[u](t), u(t))$. Puisque $u \mapsto \mathfrak{X}[u]$ est continue de $QP^0_\omega(\mathbb{R}^p)$ dans $QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$ et puisque $v \mapsto Av = [t \mapsto A(t)v(t)]$ est linéaire continue de $QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$ dans $QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$, on obtient que $u \mapsto A\mathfrak{X}[u]$ est continue de $QP^0_\omega(\mathbb{R}^p)$ dans $QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$. On a déjà vu que l'opérateur de superposition N_g est continu de $QP^0_\omega(\mathbb{R}^n) \times QP^0_\omega(\mathbb{R}^p)$ dans $QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$, et ainsi l'opérateur $u \mapsto (\mathfrak{X}[u], u)$ est continu de $QP^0_\omega(\mathbb{R}^p)$

dans $QP^0_\omega(\mathbb{R}^n) \times QP^0_\omega(\mathbb{R}^p)$ car ses deux composantes sont continues, et donc $u \mapsto N_g(\mathfrak{X}[u], u)$ est continue de $QP^0_\omega(\mathbb{R}^p)$ dans $QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$ comme composition d'opérateurs continus . Finalement $u \mapsto \mathfrak{X}'[u] = A\mathfrak{X}[u] + N_g(\mathfrak{X}[u], u)$ est continue de $QP^0_\omega(\mathbb{R}^p)$ dans $QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$ comme une somme d'opérateurs continus. Donc $u \mapsto \mathfrak{X}[u]$ est continue de $QP^0_\omega(\mathbb{R}^p)$ dans $QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)$. $\square$

2.9 Un résultat de perturbation différentiable

On fixe $\omega = (\omega_1, ..., \omega_N)$ une liste de nombres réels $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants. On considère, pour la fonction g dans l'équation (2.3), la condition suivante :

$$\left.\begin{array}{l} g \in QPU_\omega(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n) \cap C^{\tau-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n), \\ D_x g \in QPU_\omega(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, M_n(\mathbb{R})) \cap C^\tau(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, M_n(\mathbb{R})) \\ \text{où } \tau = 2(N+1)(\frac{n(n+1)}{2} + 1), \text{ et} \\ D_u g \in QPU_\omega(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, M_{n,p}(\mathbb{R})). \end{array}\right\} . \tag{2.67}$$

Dans cette condition, $D_x g$ est la différentielle partielle de g par rapport à la seconde variable vectorielle et $D_u g$ est la différentielle partielle de g par rapport à la troisième variable vectorielle.

Théorème 2.7 *Soit $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction qui satisfait* (2.67) *où ω satisfait* (2.19)*. Soit $u_* \in QP^\tau_\omega(\mathbb{R}^p)$ et soit $x_* \in QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)$ une solution de* (2.3) *où $u = u_*$.*
On pose $J(t) = D_x g(t, x_*(t), u_*(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et on note par $\beta_1, ..., \beta_n$ les FL-CER *de J. De plus on suppose que la condition suivante est satisfaite :*

$$\textit{pour tout } j = 1, ..., n, \quad \beta_j \textit{ est non nul.} \tag{2.68}$$

Alors il existe $r \in]0, \infty[$ tel que, pour tout $u \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^p)$ qui satisfait $\|u - u_*\|_\infty < r$, il existe $\mathfrak{X}[u] \in QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)$ qui est une solution de (2.3)*.*

De plus l'opérateur non linéaire $u \mapsto \mathfrak{X}[u]$ est de classe C^1 de $\{u \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^p) : \|u - u_*\|_\infty < r\}$ dans $QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)$, et il existe un voisinage $\mathcal{N}$ de x_* dans $QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)$ tel que $\mathfrak{X}[u]$ est l'unique solution de (2.3) *dans $QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)$ qui appartient à $\mathcal{N}$.*

Avant de commencer la preuve de ce théorème on a besoin d'un lemme de Calcul Différentiel :

Lemme 2.8 *Quand $g \in QPU_\omega(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ est telle que ses dérivées partielles par rapport à la seconde et la troisième variables vectorielles existent et satisfont $D_x g \in QPU_\omega(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \mathbb{M}(n, \mathbb{R}))$ et $D_u g \in QPU_\omega(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R}))$, alors l'opérateur $\Gamma : QP^1_\omega(\mathbb{R}^n) \times QP^0_\omega(\mathbb{R}^p) \longrightarrow QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$,*

$\Gamma(x,u) = [t \mapsto x'(t) - g(t,x(t),u(t))]$, *est bien-défini et il est de classe* C^1.

La formule de sa différentielle partielle par rapport à la première variable est donnée par :

$$D_1\Gamma(x_*,u_*).y = [t \mapsto y'(t) - D_x g(t,x_*(t),u_*(t)).y(t)]$$

pour tout $y \in QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Quand $x \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$ et $u \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^p)$, par la Remarque 1.2, des fonctions $\varphi \in C^0(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in C^0(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^p)$ existent telles que $x(t) = \varphi(t\omega)$ et $u(t) = \psi(t\omega)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En utilisant le Théorème 1.11, puisque $g \in QPU_\omega(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n)$, il existe $G \in C^0(\mathbb{T}^N\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n)$ telle que $g(t,x,u) = G(t\omega,x,u)$ pour tout $(t,x,u) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$.

On pose $\chi(\theta) = G(\theta,\varphi(\theta),\psi(\theta))$, alors $\chi \in C^0(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^n)$ comme composée de fonctions périodiques continues. Par conséquent on obtient $[t \mapsto g(t,x(t),u(t)) = \chi(t\omega)] \in QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$. Et ainsi l'opérateur Γ est bien-défini.

En utilisant le Théorème 1.12, on déduit que l'opérateur de superposition $N^1_g : AP^0(\mathbb{R}^n)\times AP^0(\mathbb{R}^p) \longrightarrow AP^0(\mathbb{R}^n)$, $N^1_g(x,u) = [t \mapsto g(t,x(t),u(t))]$, est de classe C^1. Et par suite l'opérateur de superposition $N_g : QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)\times QP^0_\omega(\mathbb{R}^p) \longrightarrow QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$, défini par $N_g(x,u) = [t \mapsto g(t,x(t),u(t))]$ est de classe C^1 comme une restriction de N^1_g. Et ainsi on obtient l'assertion suivante :

$$N_g \in C^1\left(QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)\times QP^0_\omega(\mathbb{R}^p), QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)\right). \tag{2.69}$$

L'opérateur $\Pi_1 : QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)\times QP^0_\omega(\mathbb{R}^p) \longrightarrow QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)$, défini par $\Pi_1(x,u) = x$, est linéaire continu, donc l'assertion suivante est vraie :

$$\Pi_1 \in C^1(QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)\times QP^0_\omega(\mathbb{R}^p), QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)). \tag{2.70}$$

L'opérateur $\frac{d}{dt} : QP^1_\omega(\mathbb{R}^n) \longrightarrow QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$, défini par $\frac{d}{dt}x = x'$, est linéaire continu, donc on obtient l'assertion suivante :

$$\frac{d}{dt} \in C^1(QP^1_\omega(\mathbb{R}^n), QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)). \tag{2.71}$$

L'opérateur $in : QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)\times QP^0_\omega(\mathbb{R}^p) \longrightarrow QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)\times QP^0_\omega(\mathbb{R}^p)$, défini par $in(x,u) = (x,u)$, est linéaire continu, et ainsi on obtient l'assertion suivante.

$$in \in C^1(QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)\times QP^0_\omega(\mathbb{R}^p), QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)\times QP^0_\omega(\mathbb{R}^p)). \tag{2.72}$$

Il est clair que $\Gamma = \frac{d}{dt}\circ\Pi_1 - N_g\circ in$, ainsi par (2.69)-(2.72), il s'ensuit que Γ est de classe C^1 comme la différence de composés d'opérateurs de classe C^1.

Maintenant, en utilisant le Théorème 1.12 et la formule de différentiation en chaîne du calcul différentiel dans les espaces de Banach, on obtient :

$$\begin{aligned}
D_1\Gamma(x_*,u_*).y &= D\Gamma(x_*,u_*).(y,0) \\
&= D\left(\frac{d}{dt}\circ\Pi_1\right)(x_*,u_*).(y,0) - D(N_g\circ in)(x_*,u_*).(y,0) \\
&= \frac{d}{dt}\circ\Pi_1(y,0) - DN_g(x_*,u_*).(y,0) \\
&= [t\longmapsto \dot{y}(t) - D_x g(t,x_*(t),u_*(t)).y(t)].
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.8 (Théorème des Fonctions Implicites) *Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ trois espaces des Banach, U un ouvert de $\mathbb{E}\times\mathbb{F}$, et $f : U \longrightarrow \mathbb{G}$ une application de classe C^1. Soit $(a,b)\in U$ tels que $f(a,b)=0$ et $f'_y(a,b)\in\mathcal{L}(\mathbb{F},\mathbb{G})$ est un isomorphisme de $\mathbb{F}$ sur $\mathbb{G}$, où la notation f'_y désigne la dérivée partielle de f par rapport à la deuxième variable. Alors il existe un voisinage ouvert, $V\subset U$, de (a,b), il exste un voisinage ouvert, $W\subset E$, de a et il existe une application de classe C^1, $g : W\longrightarrow F$ qui jouissent des propriétés suivantes :*

$$g(a)=b,$$

$$\forall x\in W,\quad f(x,g(x))=0,$$

$$\{(x,y)\in V\,:\,f(x,y)=0\}=\{(x,g(x))\,:\,x\in W\}.$$

c.f. (1, Théorème 4.7.1, p.61).

Démonstration. (du Théorème 2.7.) Puisque g est de classe $C^{\tau-1}$, en utilisant un "bootstrapping" argument, on conclut que x_* est aussi de class C^τ.

Ainsi la matrice J est de classe C^τ et appartient à $QP^0_\omega(\mathbb{M}(n,\mathbb{R}))$. L'hypothèse (2.68) assure que (2.57) est verifiée pour $A=J$. Et donc on peut utiliser le Lemme 2.7 pour affirmer que pour tout $b\in QP^0_\omega(\mathbb{R}^n)$, il existe un unique $y\in QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)$ tel que $y'(t)=J(t)y(t)+b(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Par conséquent, en utilisant le Lemme 2.8, on peut traduire ce résultat sous la forme suivante :

$$D_1\Gamma(x_*,u_*) \text{ est une bijection de } QP^1_\omega(\mathbb{R}^n) \text{ dans } QP^0_\omega(\mathbb{R}^n). \tag{2.73}$$

Puisque $x'_*(t)=g(t,x_*(t),u_*(t))$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, alors l'assertion est satisfaite :

$$\Gamma(x_*,u_*)=0. \tag{2.74}$$

Puisque Γ est de classe C^1, (2.73) et (2.74) permettent d'utiliser le Théorème 2.8 des fonctions implicites du calcul différentiel dans les espaces de Banach. Et donc on peut affirmer qu'il existe $\mathcal{V}=\{x\in QP^1_\omega(\mathbb{R}^n) : \|x-x_*\|_{C^1}<r\}$ tel que $r\in(0,\infty)$, un voisinage $\mathcal{N}$ de u_* in $QP^0_\omega(\mathbb{R}^p)$, et une application $\mathfrak{X} : \mathcal{V}\longrightarrow\mathcal{N}$ de classe C^1 tels

que, pour tout $(x, u) \in \mathcal{V} \times \mathcal{N}$, on a $\Gamma(x, u) = 0$ si et seulement si $x = \mathfrak{X}[u]$.

Notons que $\Gamma(x, u) = 0$ est équivalent à dire que x est une solution de (2.3) dans $QP^1_\omega(\mathbb{R}^n)$. Et donc le Théorème 2.7 est prouvé. $\square$

Bibliographie

[1] H. Cartan, "Cours de calcul différentiel", Hermann, Paris, 1967.

[2] Z. Lin, "The Floquet Theory for Quasi-Periodic Linear Systems", Applied Mathematics and Mechanics (Edition Anglaise), 3 (3), June 1982.

[3] Z. Lin, "Theory of Linear Systems", Annals of Differential Equations, 6 (2), 1990, 153-215.

[4] Z. Lin, and Y.X. Lin, "Linear Systems, Exponential Dichotomy, and Structure of Sets of Hyperbolic Points", World Scientific, Singapore, 2000.

[5] A. M. Samoilenko, " Elements of the Mathematical Theory of Multi-Frequency Oscillations", English Edition, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

[6] M. Roseau, "Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité", Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[7] L. Schwartz, "Cours d'analyse, tome 1", Hermann, Paris, 1981.

[8] H. Brezis, "Analyse fonctionnelle. Théorie et applications", Masson, Paris, 1983.

3 Réductibilité et résultats d'existence pour des équations différentielles presque-périodiques

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on établit un résultat de réductibilité d'un système linéaire p.p. (presque-périodique) en un système linéaire triangulaire supérieur p.p.. On établit aussi un résultat de réductibilité d'un système linéaire en un système linéaire triangulaire supérieur avec conservation de nombre des solutions p.p. linéairement indépendantes.

On prouve un résultat d'existence et d'unicité de solutions p.p. de systèmes semi-linéaires dont la partie linéaire est p.p..

On établit aussi un résultat de dépendance continue des solutions p.p d'un système non linéaire par rapport a un terme de contrôle p.p..

Dans un premier temps on considère l'équation différentielle ordinaire linéaire p.p.

$$x'(t) = A(t)x(t) \tag{3.1}$$

où A est une matrice de format $n \times n$ réelle et p.p..

Quand toutes les solutions de (3.1) sont p.p., on établit (Théorème 3.4 dans la Section 3) qu'il existe une transformation p.p. entre les solutions de (3.1) et les solutions de

$$y'(t) = B(t)y(t) \tag{3.2}$$

où B est une matrice réelle p.p. de format $n \times n$ telle que $B(t)$ est triangulaire supérieure pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Quand k solutions linéairement indépendantes de (3.1) sont p.p., on peut construire une matrice $B(t)$ continue par rapport à t telle que (3.2) possède aussi k solutions linéairement indépendantes p.p. (Théorème 3.5

dans la Section 4).

Dans la Section 5 on considère l'équation non linéaire suivante

$$u'(t) = B(t)u(t) + f(t, u(t)) \tag{3.3}$$

où B est une matrice p.p. telle que l'équation homogène de (3.3) ne possède aucune solution p.p. non nulle et f est uniformément p.p. (Théorème 3.6).

Dans le chapitre précédent, on a considéré le cas où $u'(t) = B(t)u(t)$ ne possède aucune solution p.p. non nulle et où ce système homogène peut être transformé en un système linéaire de matrice constante dans le cas quasi-périodique et sous des conditions diophantiennes.

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t), u(t)). \tag{3.4}$$

Dans la Section 6, en utilisant les résultats de la Section 5, on utilise un théorème de Points Fixes Paramétrés pour obtenir un résultat d'existence et un résultat de dépendance continue de solutions presque-périodiques de l'équation différentielle suivante :

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t), u(t)), \tag{3.5}$$

où u est un terme de contrôle, (Théorème 3.7).

3.2 Notations et rappels

Le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ est noté par $(.|.)$ et $\|.\|$ est la norme associée. Et $\mathcal{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ désigne l'espace des fonctions strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

En utilisant le résultat de Bochner (Proposition 1.3), on peut définir une fonction p.p. $u : \mathbb{R} \to E$ comme une fonction de $BC^0(\mathbb{R}, E)$ et pour tout $(r_m)_m \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ il existe $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ telle que la suite de fonctions translatées $(f(. + r_{\sigma(m)}))_m$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

On note par $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles d'ordre n. La matrice transposée de $M \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ est notée par M^*.

Le résultat suivant est un corollaire d'un théorème dû à Bochner, prouvé dans (7, Théorème 1.17, p.12).

Théorème 3.1 *Soit $f \in AP^0(\mathbb{R}^n)$ et $(r_m)_m \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors il existe $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ telle que $\lim_{m\to\infty} f(t + r_{\sigma(m)}) = g(t)$ uniformément sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{m\to\infty} g(t - r_{\sigma(m)}) = f(t)$ uniformément sur $\mathbb{R}$.*

(voir (5) aussi).

Théorème 3.2 *(7, Théorème 5.7, p. 85).*
Soit $A \in AP^0(\mathbb{M}(n, \mathbb{R}))$ et $x \in AP^1(\mathbb{R})$ la solution de

$$x'(t) = A(t)x(t).$$

Alors on a $\inf_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\| > 0$ *ou* $x = 0$.

Théorème 3.3 *(6, Théorème p. 30).*
Soit $A \in AP^0(\mathbb{M}(n,\mathbb{R}))$. *Si toutes les solutions de* $x'(t) = A(t)x(t)$ *sont presque-périodiques alors*

$$t \mapsto \int_0^t \sum_{j=1}^n A_{nn}(s)ds$$

est bornée, où $A(t) = (A_{jj}(t))_{1\le j\le n}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

3.3 Un premier résultat de réductibilité.

Dans cette section on établit que (3.1) est réductible en un système triangulaire supérieur (3.2) sous les hypothèses suivantes :

(**A1**) $A \in AP^0(\mathbb{M}(n,\mathbb{R}), M)$
(**A2**) Toutes les solutions de (3.1) sont dans $AP^1(\mathbb{M}(n,\mathbb{R}), M)$,

où M est un sous-$\mathbb{Z}$-module fixé de $\mathbb{R}$.

Lemme 3.1 *Soit* $u \in AP^1(\mathbb{R}^n; M)$ *telle que* $\inf_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\| > 0$. *Alors* $t \mapsto \frac{1}{\|u(t)\|} \in AP^1(\mathbb{R}; M)$.

Démonstration. On sait que $\|.\|$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On pose

$$N(z) = \|z\| \quad \text{et} \quad N_1(z) = \frac{1}{\|z\|},$$

alors on a pour tous $z, h \in \mathbb{R}^n$,

$$DN(z).h = \frac{1}{\|z\|}(z|h) \quad \text{et} \quad DN_1(z).h = \frac{-1}{\|z\|^3}(z|h).$$

En utilisant la formule de différentiation en chaîne on obtient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\|u(t)\|}\right) = \frac{-1}{\|u(t)\|^3}(u(t)|u'(t)).$$

Puisque $u, u' \in AP^0(\mathbb{R}^n; M)$ et $\inf_{t\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\|u(t)\|^3}\right) > 0$, alors en utilisant (7, Théorème 1.9, p. 5) on obtient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\|u\|}\right) \in AP^0(\mathbb{R}; M).$$

Et donc

$$\frac{1}{\|u\|} \in AP^1(\mathbb{R}; M).$$

□

Lemme 3.2 *Sous* $(\mathbf{A1})$ *et* $(\mathbf{A2})$*, soient* $x_1, \cdots, x_n \in AP^1(\mathbb{R}^n, M)$ *des solutions linéairement indépendantes de* (3.1)*. Alors il existe* $w_1, \cdots, w_n \in AP^1(\mathbb{R}^n, M)$ *qui satisfont les conditions suivantes.*

(i) $\forall j, k \in \{1, \cdots, n\}$ *t.q.* $j \neq k$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $(w_j(t)|w_k(t)) = 0$.

.

(ii) $\forall k = 1, \cdots, n$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $Vect\{w_j(t) : 1 \leq j \leq k\} = Vect\{x_j(t) : 1 \leq j \leq k\}$.

(iii) $\forall k \in \{1, \cdots, n\}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $w_k(t) = x_k(t) - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{j,k}(t) x_j(t)$ *où* $\lambda_{j,k} \in AP^1(\mathbb{R}; M)$.

(iv) $\forall k = 1, \cdots, n$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $x_k(t) = w_k(t) - \sum_{j=1}^{k-1} \mu_{j,k}(t) w_j(t)$ *où* $\mu_{j,k} \in AP^1(\mathbb{R}; M)$.

(v) $\forall k = 1, \cdots, n$, $\inf_{t \in \mathbb{R}} \|w_k(t)\| > 0$.

Démonstration. On procède par récurrence sur $k \in \{1, \cdots, n\}$.

Première étape : $k = 1$. On pose $w_1 = x_1$. Puisque $x_1, \cdots, x_n$ sont linéairement indépendantes, on a $x_1(t) \neq 0$, et puisque x_1 est une solution de (3.1), on a $x_1(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Condition (i) n'a pas de sens pour une seule fonction. Les conditions (ii), (iii) et (iv) sont évidentes et (v) est une conséquence du Théorème 3.2.

Seconde étape : Hypothèse de recurrence sur $k \in \{1, \cdots, n-1\}$.
On suppose qu'il existe $w_1, \cdots, w_k \in AP^1(\mathbb{R}^n; M)$ qui satisfont les assertions suivantes.

$(i)_k$ $\forall i \neq j \in \{1, \cdots, k\}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $(w_i(t)|w_j(t)) = 0$.

$(ii)_k$ $\forall j \in \{1, \cdots, k\}$, $\forall t \in \mathbb{R}$,
$Vect\{w_i(t) : 1 \leq i \leq j\} = Vect\{x_i(t) : 1 \leq i \leq j\}$.

$(iii)_k$ $\forall j = 1, \cdots, k$, $\forall t \in \mathbb{R}$,
$w_j(t) = x_j(t) - \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_{i,j}(t) x_i(t)$ où $\lambda_{i,j} \in AP^1(\mathbb{R}; M)$.

$(iv)_k$ $\forall j = 1, \cdots, k$, $\forall t \in \mathbb{R}$,
$x_j(t) = w_j(t) - \sum_{i=1}^{j-1} \mu_{i,j}(t) w_i(t)$ où $\mu_{i,j} \in AP^1(\mathbb{R}; M)$.

$(v)_k$ $\forall j = 1, \cdots, k$, $\inf_{t \in \mathbb{R}} \|w_j(t)\| > 0$.

Troisième étape : On prouve l'existence de $w_{k+1} \in AP^1(\mathbb{R}^n; M)$ tel que $w_1, \cdots, w_{k+1}$ satisfont $(i)_{k+1}$, $(ii)_{k+1}$, $(iii)_{k+1}$, $(iv)_{k+1}$, $(v)_{k+1}$.
On considère $P_{k,t}$ la projection orthogonale sur $Vect\{x_i(t) : 1 \leq i \leq k\} = Vect\{w_i(t) : 1 \leq i \leq k\}$ (après $(ii)_k$). En utilisant $(i)_k$, il est connu (9, p. 136-138) que

$$P_{k,t}(x_{k+1}(t)) = \sum_{j=1}^{k} \frac{(x_{k+1}(t)|w_j(t))}{\|w_j(t)\|^2} w_j(t). \tag{3.6}$$

On définit

$$w_{k+1}(t) = x_{k+1}(t) - P_{k,t}(x_{k+1}(t)). \tag{3.7}$$

En utilisant la caractérisation de la projection orthogonale (9, p. 136-138) et $(i)_k)$ on obtient $(i)_{k+1}$.

En utilisant $(v)_k$ on peut assurer que $t \mapsto \|w_j(t)\|^{-2} \in AP^1(\mathbb{R}; M)$. Puisque $(.|.)$ est bilinéaire continue et x_{k+1}, $w_j \in AP^1(\mathbb{R}^n; M)$, par le Corollaire 1.1, on conclut que $t \mapsto (x_{k+1}(t)|w_j(t)) \in AP^1(\mathbb{R}; M)$. Du fait que $AP^1(\mathbb{R}; M)$ est un algèbre et $(r, \xi) \mapsto r\xi$ est bilinéaire continue de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, on déduit en utilisant (3.6) que :

$$w_{k+1} \in AP^1(\mathbb{R}^n; M). \tag{3.8}$$

Par (3.6) et les arguments précédents on conclut que $(iv)_{k+1}$ est vraie.

On note par l'indice supérieur q, la q-ième coordonnée d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$, la relation dans $(iv)_{k+1}$ est équivalente au système suivant, pour $q = 1, \cdots, n$ et $j = 1, \cdots, k+1$

$$x_j^q(t) = w_j^q(t) - \sum_{i=1}^{j-1} \mu_{i,j}(t) w_i^q(t). \tag{3.9}$$

Posons $T(t) = (\tau_{i,j}(t))_{1 \le i,j \le k+1}$ avec $\tau_{i,j}(t) = 0$ si $j > i$, $\tau_{i,i}(t) = 1$ et

$\tau_{i,j}(t) = -\mu_{i,j}(t)$ si $j < i$, (3.9) est équivalente au système suivant, pour $q = 1, \cdots, n$,

$$\begin{pmatrix} x_1^q(t) \\ \vdots \\ x_{k+1}^q(t) \end{pmatrix} = T(t) \begin{pmatrix} w_1^q(t) \\ \vdots \\ w_{k+1}^q(t) \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

On sait que $\det T(t) = \prod_{i=1}^{k+q} \tau_{ii}(t) = 1$ car $T(t)$ est triangulaire supérieure, et donc $T(t)$ est inversible, et l'inverse de $T(t)$ est $T(t)^{-1} = cof\ T(t)^*$ la matrice des cofacteurs de $T(t)$.

Si $T(t)^{-1} = (\sigma_{i,j}(t))_{1 \le i,j \le k+1}$, alors on a

$$\sigma_{i,j} = (-1)^{i+j} cof_{i,j} T(t) = (-1)^{i+j} \det T(t)_{\widehat{i,j}},$$

où $T(t)_{\widehat{i,j}}$ est la matrice d'ordre k obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne, (1, Définition 4.15, p. 117).

Puisque $\tau_{i,j} \in AP^1(\mathbb{R}; M)$ et le déterminant est multilinéaire continu, alors par le Corollaire 1.1 il suit que $\sigma_{i,j} \in AP^1(\mathbb{R}; M)$ pour tout i, j.

Par le fait que $T(t)$ est triangulaire supérieure, il suit que $T(t)^{-1}$ est aussi triangulaire supérieure, et par (3.10) on obtient, pour tout $q = 1, ..., n$,

$$\begin{pmatrix} w_1^q(t) \\ \vdots \\ w_{k+1}^q(t) \end{pmatrix} = T(t)^{-1} \begin{pmatrix} x_1^q(t) \\ \vdots \\ x_{k+1}^q(t) \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

ce qui implique $(iii)_{k+1}$.
En utilisant $(iii)_{k+1}$ et $(iv)_{k+1}$ on obtient $(ii)_{k+1}$.

Enfin il reste à prouver que $(v)_{k+1}$ est satisfaite. Pour cela, par $(v)_k$, il suffit de prouver que $\inf_{t\in\mathbb{R}} \|w_{k+1}(t)\| > 0$. On procède par l'absurde, on suppose que $\inf_{t\in\mathbb{R}} \|w_{k+1}(t)\| = 0$. Par conséquent, il existe $(r_m)_m \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{m\to\infty} w_{k+1}(r_m) = 0$. Par le Théorème 3.1, il existe $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ telle que , pour tout $j = 1, \cdots, k+1$, et $i = 1, \cdots, j$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} x_j(t + r_{\sigma(m)}) &= y_j(t), & \lim_{m\to\infty} y_j(t - r_{\sigma(m)}) &= x_j(t),\\
\lim_{m\to\infty} x'_j(t + r_{\sigma(m)}) &= y'_j(t), & \lim_{m\to\infty} y'_j(t - r_{\sigma(m)}) &= x'_j(t),\\
\lim_{m\to\infty} A(t + r_{\sigma(m)}) &= L(t), & \lim_{m\to\infty} L(t - r_{\sigma(m)}) &= A(t),\\
\lim_{m\to\infty} \lambda_{i,j}(t + r_{\sigma(m)}) &= \mu_{i,j}(t), & \lim_{m\to\infty} \mu_{i,j}(t - r_{\sigma(m)}) &= \lambda_{i,j}(t),
\end{aligned}$$

où toutes ces convergences sont uniformes sur $\mathbb{R}$.

Donc on a, pour tout $j = 1, ..., k+1$,

$$y'_j(t) = L(t)y_j(t). \tag{3.12}$$

On note que

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{m\to\infty} w_{k+1}(r_{\sigma(m)})\\
&= \lim_{m\to\infty} [x_{k+1}(r_{\sigma(m)}) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_{j,k}(r_{\sigma(m)}) x_j(r_{\sigma(m)})]\\
&= y_{k+1}(0) - \sum_{j=1}^{k} \mu_{j,k}(0) y_j(0);
\end{aligned}$$

et par suite,

$$y_{k+1}(0) = \sum_{j=1}^{k} \mu_{j,k}(0) y_j(0).$$

puisque les y_j sont des solutions de (3.12) on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y_{k+1}(t) = \sum_{j=1}^{k} \mu_{j,k}(0) y_j(t).$$

Par conséquent,

$$x_{k+1}(t) = \lim_{m\to\infty} y_{k+1}(t - r_{\sigma(m)}) = \sum_{j=1}^{k} \mu_{j,k}(0) \lim_{m\to\infty} y_j(t - r_{\sigma(m)}) = \sum_{j=1}^{k} \mu_{j,k}(0) x_j(t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui est impossible puisque $x_1, ..., x_{k+1}$ sont linéairement indépendantes. Ainsi la preuve est achevée. □

Lemme 3.3 *Sous* (**A1**), (**A2**), *soit $t \mapsto X(t)$ une matrice fondamentale de* (3.1). *Alors il existe $R \in AP^1(\mathbb{M}(n,\mathbb{R}); M)$ et $Q \in AP^1(\mathbb{M}(n,\mathbb{R}); M)$ telles que $Q(t)$ est orthogonale, $R(t)$ est triangulaire supérieure et $Q(t) = X(t)R(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $x_1(t), ..., x_n(t)$ les colonnes de $X(t)$. On note que $x_1, ..., x_n$ satisfont les hypothèses du Lemme 3.2. Soit $w_1, ..., w_n$ provenant du Lemme 3.2. On a $v_k(t) = \|w_k(t)\|^{-1} w_k(t)$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$ et pour $t \in \mathbb{R}$. En utilisant (v) du Lemme 3.2 et le Corollaire 1.1, on obtient que $\|w_k(.)\|^{-1} \in AP^1(\mathbb{R}; M)$, et $v_k \in AP^1(\mathbb{R}^n; M)$.

Puisque $w_1(t), ..., w_n(t)$ sont orthogonales, on obtient

$$\forall j = 1, ..., n, \ \forall t \in \mathbb{R}, \quad (v_j(t)|v_k(t)) = \delta_j^k \text{ (symbole de Kronecker)}. \tag{3.13}$$

Maintenant on définit $Q(t)$ comme la matrice dont les colonnes sont $v_1(t), ..., v_n(t)$. De (3.13) on déduit que $Q(t)^* Q(t) = I$, i.e. $Q(t)$ est orthogonale. Et comme $v_k \in AP^1(\mathbb{R}; M)$, alors $Q \in AP^1(\mathbb{M}(n, \mathbb{R}); M)$.

Par (iii) du Lemme 3.2, on déduit que, pour tout $k = 1, ..., n$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $v_k(t) = \|w_k(t)\|^{-1} x_k(t) - \sum_{j=1}^n \|w_k(t)\|^{-1} \lambda_{j,k}(t) x_j(t)$ avec $\lambda_{j,k}(t) = 0$ si $j > k$.

L'indice supérieur i désigne la i-ème coordonnée de ce vecteur, on obtient, pour tout $k = 1, ..., n$ et pour tout $i = 1, ...n$,

$$\begin{aligned} v_k^i(t) &= \|w_k(t)\|^{-1} x_k^i(t) - \sum_{j=1}^n \|w_k(t)\|^{-1} \lambda_{j,k}(t) x_j^i(t) \\ &= (x_1^i(t) \cdots x_k^i(t) \cdots x_n^i(t)) \begin{pmatrix} \|w_k(t)\|^{-1} \lambda_{1,k}(t) \\ \cdots \\ \|w_k(t)\|^{-1} \lambda_{k-1,k}(t) \\ \|w_k(t)\|^{-1} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.14}$$

et donc, on posant

$$r_{j,k}(t) = \begin{cases} \|w_k(t)\|^{-1} \lambda_{j,k}(t) & \text{when } j \leq k-1 \\ \|w_k(t)\|^{-1} & \text{when } j = k \\ 0 & \text{when } j > k \end{cases}$$

on conclut que la matrice $R(t) = (r_{j,k}(t))_{1 \leq j,k \leq n}$ est triangulaire supérieure, et ainsi (3.14) s'écrit comme suit :

$$Q(t) = X(t) R(t).$$

Par le Lemme 3.2 et le Lemme 3.1, il suit que $r_{j,k} \in AP^1(\mathbb{R}; M)$ pour tous $j, k = 1, \cdots, n$. Ainsi $R \in AP^1(\mathbb{M}(n, \mathbb{R}); M)$. □

Lemme 3.4 *Sous* $(\mathbf{A1})$ *et* $(\mathbf{A2})$, *soit* $t \mapsto X(t)$ *une matrice fondamentale de* (3.1). *Soit* Q *et* R *provenant du Lemme 3.2. On pose*

$$B(t) = -Q^{-1}(t) Q'(t) + Q^{-1}(t) A(t) Q(t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. *Alors* $B \in AP^0(\mathbb{M}(n, \mathbb{R}); M)$ *et* $B(t)$ *est triangulaire supérieure pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} Q'(t) &= X'(t)R(t) + X(t)R'(t) \\ &= A(t)X(t)R(t) + X(t)R'(t) \\ &= A(t)Q(t) + X(t)R'(t). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} -Q^{-1}(t)Q'(t) &= -Q^{-1}(t)A(t)Q(t) - Q^{-1}(t)X(t)R'(t) \\ &= -Q^{-1}(t)A(t)Q(t) - R^{-1}(t)R'(t). \end{aligned}$$

Ainsi

$$B(t) = -R^{-1}(t)R'(t). \tag{3.15}$$

Comme $R(t)$ est triangulaire supérieure, $R^{-1}(t)$ et $R'(t)$ sont aussi triangulaires supérieures, et puisque le produit de matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure, on obtient par (3.15) que $B(t)$ est triangulaire supérieure.

Puisque $Q(t)$ est orthogonale, on a $B(t) = -Q^*(t)Q'(t) + Q^*(t)A(t)Q(t)$, et du fait que Q, Q^*, $A \in AP^0(\mathbb{M}(n,\mathbb{R});M)$, il découle que $B \in AP^0(\mathbb{M}(n,\mathbb{R});M)$. □

Théorème 3.4 *Sous* (**A1**) *et* (**A2**) *il existe* $Q \in AP^1(\mathbb{M}(n,\mathbb{R});M)$ *et* $B = (b_{jk})_{1\le j,k\le n} \in AP^0(\mathbb{M}(n,\mathbb{R});M)$ *qui satisfont les conditions suivantes :*

(i) *$Q(t)$ est orthogonale pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

(ii) *$B(t)$ est triangulaire supérieure pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

(iii) *Si x est une solution de* (3.1) *alors y, définie par $y(t) = Q^{-1}(t)x(t)$, est une solution de* (3.2) *et inversement si y est une solution de* (3.2) *alors x, définie par $x(t) = Q(t)y(t)$, est une solution de* (3.1).

(iv) *Pour tout $k = 1, ..., n$, $t \mapsto \int_0^t b_{kk}(s)\,ds \in AP^1(\mathbb{R}^n;M)$.*

Démonstration. Soit X une matrice fondamentale de (3.1), soit Q et R les matrices provenant du Lemme 3.3, et soit B provenant du Lemme 3.4. Par le Lemme 3.3, on obtient (i) et par le Lemme 3.4 on obtient (ii).

Pour prouver (iii), si $x'(t) = A(t)x(t)$ et $y(t) = Q^{-1}(t)x(t)$, alors on a

$$\begin{aligned} y'(t) &= (Q^{-1})'(t)x(t) + Q^{-1}(t)x'(t) \\ &= -Q^{-1}(t)Q'(t)Q^{-1}(t)x(t) + Q^{-1}(t)A(t)x(t) \\ &= -Q^{-1}(t)X'(t)R(t)Q^{-1}(t)x(t) - Q^{-1}(t)X(t)R'(t)Q^{-1}(t)x(t) + Q^{-1}(t)A(t)x(t) \\ &= -Q^{-1}(t)A(t)X(t)R(t)Q^{-1}(t)x(t) - R^{-1}(t)R'(t)y(t) + Q^{-1}(t)A(t)x(t) \\ &= Q^{-1}(t)A(t)x(t) + Q^{-1}(t)A(t)x(t) - R^{-1}(t)R'(t)y(t) \\ &= B(t)y(t) \quad \text{par (3.15)}. \end{aligned}$$

Inversement, si $y'(t) = B(t)y(t)$ et $x(t) = Q(t)y(t)$, alors on a

$$\begin{aligned} x'(t) &= Q'(t)y(t) + Q(t)y'(t) \\ &= Q'(t)Q^{-1}(t)x(t) + Q(t)B(t)y(t) \\ &= Q'(t)Q^{-1}(t)x(t) + Q(t)[-Q^{-1}(t)Q'(t) + Q^{-1}(t)A(t)Q(t)]Q^{-1}(t)x(t) \\ &= Q'(t)Q^{-1}(t)x(t) - Q'(t)Q^{-1}(t)x(t) + A(t)x(t) \\ &= A(t)x(t). \end{aligned}$$

Ainsi (iii) est prouvée.

Enfin, pour prouver (iv) on note que (3.2) est équivalente à

$$y'_k(t) = \sum_{j=k}^{n} b_{kj}(t)y_j(t), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Dans la suite on procède par récurrence décroissante.

Première étape : $k = n$. Puisque toutes les solutions de l'équation scalaire $y'_n(t) = b_{nn}(t)y_n(t)$ sont p.p., alors par le Théorème 3.3, on obtient nécessairement que la fonction $t \mapsto \int_0^t b_{nn}(s)\,ds$ est bornée et par conséquent elle est p.p.

Seconde étape : L'hypothèse de récurrence, pour $k \in \{2, ..., n\}$, $t \mapsto \int_0^t b_{jj}(s)\,ds$ est p.p. pour tout $j \in \{k, ..., n\}$.

Troisième étape : le cas $k - 1$.

On considère le sous-système suivant

$$y'_j(t) = \sum_{i=j}^{n} b_{ji}(t)y_i(t), \quad i = k-1, ..., n. \tag{3.16}$$

Puisque b_{ji} sont p.p., et que toutes les solutions de (3.16) sont p.p., en utilisant le Théorème 3.3, il résulte que $t \mapsto \int_0^t \sum_{i=k-1}^{n} b_{ii}(s)\,ds$ est p.p., et par l'hypothèse de récurrence on déduit que $t \mapsto \int_0^t \sum_{i=k}^{n} b_{ii}(s)\,ds$ est p.p. comme une somme des fonctions p.p.. En conséquence, $t \mapsto \int_0^t b_{k-1,k-1}(s)\,ds$ est p.p. comme une différence de deux fonctions p.p.. □

Remarque 3.1 *Dans le théorème précédent, $Y(t) = Q^{-1}(t)X(t)$ est une matrice fondamentale de (3.2). Ainsi, $Q(t) = X(t)R(t)$ implique que $Y(t) = R^{-1}(t)$ qui est triangulaire supérieure puisque l'inverse d'une matrice régulière triangulaire supérieure est aussi triangulaire supérieure.*

Remarque 3.2 *Une telle construction de $B(t)$ à partir de $A(t)$ est faite dans le cas continu dans (4, Théorème 1.4, p. 4), dans le cas périodique dans (4) (dans la preuve du Théorème 1.7, p. 12-13) et dans le cas quasi-périodique dans (4) (dans la preuve* *du Lemme 4.3, p.134-135) sous la condition diophantienne. Théorème 3.4 contient le cas quasi-périodique puisque on peut choisir M comme un sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{R}$ ayant une base finie, et on n'a pas besoin de condition diophantienne.*

Remarque 3.3 *Dans la théorie de Floquet-Lin pour les systèmes quasi-périodiques developpée par Z. Lin (2), (3), (4), les exposants caractéristiques de Floquet (FL-CER) of (3.1), notés par $\beta_1, ..., \beta_n$, satisfont $\beta_k = \mathcal{M}\{b_{kk}\}$ (4, p. 137). Une conséquence de (iv) dans le Théorème 3.4 est le fait que $\beta_k = 0$ pour tout $k = 1, ..., n$. Si il existe une matrice réelle d'ordre n, constante et triangulaire supérieure Ω provenant de la théorie de Lin (4, Theorem 4.1, p. 139) alors (3.1) est réductible en $z'(t) = \Omega\, z(t)$ et les valeurs propres de Ω sont $\beta_1, ..., \beta_n$. Et donc, sous $(\mathbf{A1} - \mathbf{A2})$, on peut aisément vérifier que $\Omega = 0$ puisque toutes les solutions de $z'(t) = \Omega z(t)$ sont p.p..*

3.4 Un second résultat de réductibilité

Pour (3.1) on considère la condition suivante :

(A3) $\begin{cases} \text{L'équation (3.1) possède } k \text{ solutions presque-périodiques} \\ \text{linéairement indépendantes dans } AP^1(\mathbb{R}^n; M) \\ \text{où } M \text{ est un sous-}\mathbb{Z}\text{-module de } \mathbb{R} \text{ et } k \in \{1, ..., n\}. \end{cases}$

Théorème 3.5 *Sous $(\mathbf{A1})$ et $(\mathbf{A3})$, il existe $Q \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{M}(n, \mathbb{R}))$, $B \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{M}(n, \mathbb{R}))$ telles que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $Q(t)$ est orthogonale pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(ii) $B(t)$ est triangulaire supérieure pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(iii) Si x est une solution de (3.1) alors y, définie par $y(t) = Q^{-1}(t)x(t)$, est une solution de (3.2) et inversement si y est une solution de (3.2) alors x, définie par $x(t) = Q(t)y(t)$, est une solution de (3.1).

(iv) Si $Q(t) = col(v_1(t), \cdots, v_n(t))$ alors $v_1, \cdots, v_k \in AP^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n; M)$.

(v) L'équation (3.2) possède k solutions p.p. linéairement indépendantes.

Démonstration. On note par $x_1, \cdots, x_k \in AP^1(\mathbb{R}^n; M)$ k solutions de (3.1) qui sont linéairement indépendantes. On choisit $x_{k+1}, \cdots, x_n \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ solutions de (3.1) telles que $x_1, \cdots, x_n$ sont linéairement indépendantes.

On pose $X(t) = col(x_1(t), \cdots, x_n(t))$, c'est une matrice fondamentale de (3.1).

On pose $w_1(t) = x_1(t)$ et, pour tout $k \in \{2, \cdots, n\}$,

$$w_k(t) = x_k(t) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(x_k(t)|w_j(t))}{\|w_j(t)\|^2} w_j(t).$$

On pose $v_k(t) = \frac{1}{\|w_k(t)\|} w_k(t)$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$.

On a $x_1, \cdots, x_n \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$; il en découle que $v_1, \cdots, v_n \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. On définit $Q(t) = col(v_1(t), \cdots, v_n(t))$. On vérifie que $Q(t) = X(t)R(t)$ où $R \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{M}(n, \mathbb{R}))$ et $R(t)$ est triangulaire supérieure pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors on pose

$$B(t) = -Q^{-1}(t)Q'(t) + Q^{-1}(t)A(t)Q(t),$$

$B(t)$ est triangulaire supérieure pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $B \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{M}(n, \mathbb{R}))$. Cette construction est prouvée dans (4, Théorème 1.4, p.4), et les assertions $(i), (ii), (iii)$ résultent de ce théorème.

Pour tout $j \in \{1, \cdots, k\}$ on pose $y_j(t) = Q^{-1}(t)x_j(t) = Q^*(t)x_j(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors $y_1, \cdots, y_k$ sont des solutions de (3.2).

D'après la définition de v_j pour $j \in \{1, \cdots, k\}$, et en raisonnant comme dans la preuve du Lemme 3.2, on vérifie aisément que $v_1, \cdots, v_k \in AP^1(\mathbb{R}^n; M)$, ce qui prouve (iv).

Pour tout $p \in \{2, \cdots, n\}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on sait que $v_p(t)$ est orthogonale à $\{x_q(t) : 1 \leq q \leq p-1\}$, ainsi on obtient

$$\forall p \in \{2, \cdots, n\}, \forall q \in \{1, \cdots, p-1\}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad (v_p(t)|x_q(t)) = 0. \quad (3.17)$$

Lorsque $j \in \{1, \cdots, k\}$, puisque $y_j(t) = Q^*(t)x_j(t)$, on a pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$y_j^i(t) = (v_i(t)|x_j(t)),$$

et ainsi, en utilisant (3.17), on obtient

$$y_j^i(t) = 0 \text{ si } i > j$$

et donc

$$y_j^i(t) = 0 \text{ si } i > k.$$

Si $i \leq k$ on a $y_j^i \in AP^1(\mathbb{R}; M)$ car $v_i, x_j \in AP^1(\mathbb{R}^n; M)$. Et donc toutes les coordonnées de y_j appartiennent à $AP^1(\mathbb{R}; M)$ ce qui implique que $y_j \in AP^1(\mathbb{R}^n; M)$. Par suite $y_1, \cdots, y_k$ sont des solutions de (3.2) qui appartiennent à $AP^1(\mathbb{R}^n; M)$. De plus elles sont linéairement indépendantes. En effet,

$$\sum_{j=1}^{k} \xi_j y_j = 0$$

implique que

$$0 = \sum_{j=1}^{k} \xi_j Q^{-1} x_j = Q^{-1} (\sum_{j=1}^{k} \xi_j x_j)$$

ce qui implique que

$$\sum_{j=1}^{k} \xi_j x_j = 0$$

puisque $x_1, \cdots, x_k$ sont linéairement indépendantes, on obtient

$$\xi_1 = \cdots = \xi_k = 0.$$

Ainsi (v) est prouvée. □

3.5 Un résultat d'existence : cas linéaire.

Dans cette section on étudit l'existence des solutions p.p. de (3.3). Tout d'abord on établit un résultat sur les systèmes linéaires.

Lemme 3.5 *Soit $a \in AP^0(\mathbb{R}; M)$ telle que $\mathcal{M}\{a\} \neq 0$. Alors on a les deux assertions suivantes :*

(i) L'équation scalaire $x'(t) = a(t)x(t)$ ne possède aucune solution presque-périodique.

(ii) Pour toute $b \in AP^0(\mathbb{R}; M)$ il existe un unique $x \in AP^0(\mathbb{R}; M)$ qui est solution de $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$. De plus il existe une constante $\alpha \in]0, \infty[$ telle que,

$$\textit{Pour tout } b \in AP^0(\mathbb{R}; M), \quad \|x_b\|_\infty \leq \alpha \|b\|_\infty. \tag{3.18}$$

Démonstration. On considère les deux systèmes suivants :

$$\begin{array}{ll} (H) & x'(t) = a(t)x(t) \\ (NH) & x'(t) = a(t)x(t) + b(t). \end{array}$$

On distingue deux cas : $\mathcal{M}\{a\} > 0$ et $\mathcal{M}\{a\} < 0$.

<u>Premier cas</u> : $\mathcal{M}\{a\} > 0$.

$(\mathbf{i})$ Par l'existence de la valeur moyenne on obtient : $\forall \epsilon \in]0, \mathcal{M}\{a\}[, \exists t_\epsilon > 0, \forall t \geq t_\epsilon$,

$$\mathcal{M}\{a\} - \epsilon \leq \frac{1}{t} \int_0^t a(r)dr \leq \mathcal{M}\{a\} + \epsilon.$$

Ceci implique que, $\forall t \geq t_\epsilon$,

$$\int_0^t a(r)dr \geq t(\mathcal{M}\{a\} - \epsilon).$$

Donc

$$\exp\left(\int_0^t a(r)dr\right) \geq \exp\left(t(\mathcal{M}\{a\} - \epsilon)\right) \to \infty \text{ quand } t \to \infty,$$

et ainsi on obtient que

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t a(r)dr = \infty. \tag{3.19}$$

En conséquence de (3.19), toutes les solutions de (H), qui sont sous la forme $x(t) = \exp\left(\int_0^t a(r)dr\right)x(0)$ sont non bornées et par suite elles sont non p.p..

Comme la différence de deux solutions p.p. de (NH) est nécessairement une solution p.p. de (H), alors (NH) ne possède pas plus d'une solution p.p..

(**ii**) Maintenant on prouve l'assertion suivante :

$$\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^s a(r)dr\right)ds \quad \text{existe dans } \mathbb{R}_+. \tag{3.20}$$

Du fait que $\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\int_0^s a(r)dr = \mathcal{M}\{a\} > 0$, il suit que :
$\forall\epsilon \in]0, \mathcal{M}\{a\}[$, $\exists s_\epsilon > 0$, $\forall s \geq s_\epsilon$,

$$\mathcal{M}\{a\} - \epsilon \leq \frac{1}{s}\int_0^s a(r)dr \leq \mathcal{M}\{a\} + \epsilon.$$

D'où $\forall s \geq s_\epsilon$,

$$s\left(\mathcal{M}\{a\} - \epsilon\right) \leq \int_0^s a(r)dr.$$

Ce qui entraîne que, $\forall s \geq s_\epsilon$,

$$-\int_0^s a(r)dr \leq -s\left(\mathcal{M}\{a\} - \epsilon\right),$$

$\forall s \geq s_\epsilon$,

$$\exp\left(-\int_0^s a(r)dr\right) \leq \exp\left(-s\left(\mathcal{M}\{a\} - \epsilon\right)\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_{s_\epsilon}^\infty \exp\left(-\int_0^s a(r)dr\right)ds &\leq \int_{s_\epsilon}^\infty \exp\left(-s\left(\mathcal{M}\{a\} - \epsilon\right)\right)ds\\ &= \frac{1}{\mathcal{M}\{a\} - \epsilon}\exp\left(-s_\epsilon\left(\mathcal{M}\{a\} - \epsilon\right)\right)\\ &= \xi_\epsilon.\end{aligned}$$

Puisque $s \mapsto \exp\left(-\int_0^s a(r)dr\right)$ est continue sur l'intervalle compact $[0, s_\epsilon]$, on a

$$\int_0^{s_\epsilon} \exp\left(-\int_0^{s_\epsilon} a(r)dr\right)ds < \infty,$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^s a(r)dr\right)ds &= \int_0^{s_\epsilon} \exp\left(-\int_0^s a(r)dr\right)ds\\ &\quad + \int_{s_\epsilon}^\infty \exp\left(-\int_0^s a(r)dr\right)ds\\ &\leq \int_0^{s_\epsilon} \exp\left(-\int_0^s a(r)dr\right)ds + \xi_\epsilon\\ &< \infty.\end{aligned}$$

Et donc (3.20) est prouvée.

On sait que $s \mapsto \exp\left(-\int_0^s a(r)dr\right) b(s)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc elle est Borel-mesurable, et en utilisant l'intégrale supérieure de Lebesgue pour les fonctions positives sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de la moyenne et (3.20), on déduit que

$$\int_{\mathbb{R}_+} |\exp\left(-\int_0^s a(r)dr\right) b(s)|ds \leq \|b\|_\infty \int_{\mathbb{R}_+} \exp\left(-\int_0^s a(r)dr\right) ds < \infty.$$

Il en résulte que $s \mapsto |\exp\left(-\int_0^s a(r)dr\right) b(s)|$ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}_+$,
donc $s \mapsto \exp\left(-\int_0^s a(r)dr\right) b(s)$ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et on a :

$$\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^s a(r)dr\right) b(s)ds \text{ existe dans } \mathbb{R}. \tag{3.21}$$

Maintenant on pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) = \exp\left(\int_0^t a(r)dr\right)[-\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^s a(r)dr\right) b(s)ds \\ + \int_0^t \exp\left(-\int_0^s a(r)dr\right) b(s)ds].\end{aligned} \tag{3.22}$$

En utilisant la fomule dite de variation des constantes, on obtient

$$\hat{x} \text{ est une solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (NH). \tag{3.23}$$

Dans l'étape suivante, on va prouver que $\hat{x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
En utilisant la relation de Chasles on déduit de (3.22) l'égalité suivante

$$\begin{aligned}\forall t \geq 0, \quad \hat{x}(t) &= \exp\left(\int_0^t a(r)dr\right)\left[-\int_t^\infty \exp\left(-\int_0^s a(r)dr\right) b(s)ds\right] \\ &= -\int_t^\infty \exp\left(\int_0^t a(r)dr - \int_0^s a(r)dr\right) b(s)ds.\end{aligned}$$

Et ainsi

$$\forall t \geq 0, \quad \hat{x}(t) = -\int_t^\infty \exp\left(-\int_t^s a(r)dr\right) b(s)ds. \tag{3.24}$$

On introduit le changement de variable $\sigma : \mathbb{R}_+ \to [t, \infty]$, $\sigma(\rho) = \rho + t$, par (3.24) et en utilisant la formule de changement de variable, on obtient

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= -\int_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \exp\left(-\int_t^s a(r)dr\right) b(s)ds \\ &= -\int_0^\infty \exp\left(-\int_t^{\sigma(\rho)} a(r)dr\right) b(\sigma(\rho))\sigma'(\rho)d\rho \\ &= -\int_0^\infty \exp\left(-\int_t^{t+\rho} a(r)dr\right) b(t+\rho)d\rho\end{aligned}$$

ce qui implique, en utilisant le théorème de la valeur moyenne pour les intégrales, que :

$$\forall t \geq 0, \quad |\hat{x}(t)| \leq \left(\int_0^\infty \exp\left(-\int_t^{t+\rho} a(r)dr\right) d\rho\right) .\|b\|_\infty. \tag{3.25}$$

Du résultat de Bohr (8, p.44) on déduit que, $\forall \epsilon \in]0, \mathcal{M}\{a\}[$, $\exists \rho_\epsilon > 0$, $\forall \rho \geq \rho_\epsilon$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{M}\{a\} - \epsilon \leq \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} a(r)dr \leq \mathcal{M}\{a\} + \epsilon.$$

Donc $\forall \rho \geq \rho_\epsilon$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\rho\left(\mathcal{M}\{a\} - \epsilon\right) \leq \int_t^{t+\rho} a(r)dr \leq \rho\left(\mathcal{M}\{a\} + \epsilon\right).$$

Donc $\forall \rho \geq \rho_\epsilon$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$-\rho\left(\mathcal{M}\{a\} - \epsilon\right) \geq -\int_t^{t+\rho} a(r)dr.$$

Ainsi $\forall \rho \geq \rho_\epsilon$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\exp\left(-\int_t^{t+\rho} a(r)dr\right) \leq \exp\left(-\rho\left(\mathcal{M}\{a\} - \epsilon\right)\right).$$

Et par conséquent, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\int_{\rho_\epsilon}^{\infty} \exp\left(-\int_t^{t+\rho} a(r)dr\right) d\rho &\leq \int_{\rho_\epsilon}^{\infty} \exp\left(-\rho\left(\mathcal{M}\{a\} - \epsilon\right)\right) d\rho \\
&= \frac{1}{\mathcal{M}\{a\} - \epsilon} \exp\left(-\rho_\epsilon\left(\mathcal{M}\{a\} - \epsilon\right)\right) \\
&= \xi_\epsilon.
\end{aligned}$$

De plus, lorsque $\rho \in [0, \rho_\epsilon]$,

$$-\int_t^{t+\rho} a(r)dr \leq |\int_t^{t+\rho} a(r)dr| \leq \rho \sup_{s \in [0,\rho_\epsilon]} |a(s)| \leq \rho \|a\|_\infty.$$

Il en découle

$$\exp\left(-\int_t^{t+\rho} a(r)dr\right) \leq \exp(\rho\|a\|_\infty)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Et par suite on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{\rho_\epsilon} \exp\left(-\int_t^{t+\rho} a(r)dr\right) d\rho &\leq \int_0^{\rho_\epsilon} \exp(\rho\|a\|_\infty)d\rho \\
&= \frac{1}{\|a\|_\infty}(\exp(\rho_\epsilon\|a\|_\infty) - 1) \\
&= \xi_\epsilon^1.
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant la relation de Chasles, on obtient

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\int_t^{t+\rho} a(r)dr\right) d\rho \leq \xi_\epsilon + \xi_\epsilon^1 = \xi_\epsilon^2 < \infty, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.26}$$

Notons que ξ_ϵ et ξ_ϵ^1 ne dépendent pas de t.
Comme conséquence de (3.25) et (3.26) on a l'assertion suivante :

$$\hat{x} \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+. \tag{3.27}$$

Dans l'étape suivante on va prouver que $\hat{x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$.
On introduit

$$x_1(t) = \exp\left(\int_0^t a(r)dr\right)\left(-\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^s a(r)dr\right) b(s)ds\right)$$

et

$$x_2(t) = \exp\left(\int_0^t a(r)dr\right)\left(\int_0^t \exp\left(-\int_0^s a(r)dr\right) b(s)ds\right).$$

Et donc on a

$$\hat{x}(t) = x_1(t) + x_2(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_-. \tag{3.28}$$

On sait que

$$\mathcal{M}\{a\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^T a(r)dr = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T a(r)dr$$

cf. (8, p. 44), et puisque

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^T a(r)dr = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T}\int_0^T a(r)dr + \frac{1}{T}\int_{-T}^0 a(r)dr\right),$$

en prenant $t = -T$, on obtient

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{-t}\int_t^0 a(r)dr = \mathcal{M}\{a\}. \tag{3.29}$$

Notons que, pour tout $t \le 0$,

$$\int_0^t a(r)dr = -\int_t^0 a(r)dr = t\frac{1}{-t}\int_t^0 a(r)dr,$$

ce qui implique

$$\exp\left(\int_0^t a(r)dr\right) = \exp\left(t.\frac{1}{-t}\int_t^0 a(r)dr\right) \to \exp\left(-\infty.\mathcal{M}\{a\}\right) = 0$$

quand $t \to -\infty$, et ainsi on vient de prouver que

$$\lim_{t\to-\infty}\exp\left(\int_0^t a(r)dr\right) = 0. \tag{3.30}$$

Alors en utilisant (3.21) et (3.30) on obtient $\lim_{t\to-\infty} x_1(t) = 0$, et, puisque x_1 est continue sur $\mathbb{R}_-$, il suit que

$$x_1 \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_-. \tag{3.31}$$

Pour tout $t \le 0$,

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \int_0^t \exp\left(\int_0^t a(r)dr\right)\exp\left(-\int_0^s a(r)dr\right) b(s)ds \\ &= -\int_t^0 \exp\left(-\int_t^s a(r)dr\right) b(s)ds. \end{aligned}$$

D'où

$$|x_2(t)| \le \int_t^0 \exp\left(-\int_t^s a(r)dr\right) ds\|b\|_\infty.$$

On introduit $\gamma : [0,-t] \to [t,0]$, $\gamma(\rho) = \rho + t$ et en utilisant la formule de changement de variable et (3.26), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_t^0 \exp\left(-\int_t^s a(r)dr\right) ds &= \int_{\gamma(0)}^{\gamma(-t)} \exp\left(-\int_t^s a(r)dr\right) ds \\
&= \int_0^{-t} \exp\left(-\int_t^{\gamma(\rho)} a(r)dr\right) \gamma'(\rho)d\rho \\
&= \int_0^{-t} \exp\left(-\int_t^{t+\rho} a(r)dr\right) d\rho \\
&\leq \int_0^{\infty} \exp\left(-\int_t^{t+\rho} a(r)dr\right) d\rho \leq \xi_\epsilon^2,
\end{aligned}$$

pour tout $t \leq 0$, où ξ_ϵ^2 est indépendant de t.
En conséquence, $\forall t \leq 0$, on a

$$|x_2(t)| \leq \xi_\epsilon^2 \|b\|_\infty,$$

ce qui prouve que

$$x_2 \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_-. \tag{3.32}$$

Par (3.28), (3.31) et (3.32), on sait que $\hat{x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_-$, et avec (3.27), on conclut que

$$\hat{x} \text{ est bornée sur } \mathbb{R}. \tag{3.33}$$

D'après (7, Théorème 6.3, p. 100), $\hat{x}$ est une solution p.p. de (NH), et elle est la seule solution p.p..

Ainsi la preuve du lemme est achevée dans le cas où $\mathcal{M}\{a\} > 0$.

<u>Second cas</u> : $\mathcal{M}\{a\} < 0$. Pour traiter le cas $\mathcal{M}\{a\} < 0$, on considère l'équation supplémentaire

$$(AE) \quad y'(t) = -a(-t)y(t) - b(-t)$$

et on note que $y(t) = x(-t)$ une solution de (AE) si et seulement si x est une solution de (NH). On note aussi que $\mathcal{M}_t\{-a(-t)\} = -\mathcal{M}_t\{a(-t)\} = -\mathcal{M}\{a\}$. Lorsque $\mathcal{M}\{a\} < 0$, alors $\mathcal{M}_t\{-a(-t)\} > 0$ et en utilisant le raisonnement précédent, on peut affirmer que (AE) possède une unique solution p.p. notée y. Par conséquent, $x(t) = y(-t)$ est l'unique solution p.p. de (NH). □

Maintenant, on considère l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{3.34}$$

où $A = (A_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in AP^0(\mathbb{M}(n,\mathbb{R}))$ et $b \in AP^0(\mathbb{R}^n)$ sont tels que

$$(\mathbf{A4}) \quad \begin{cases} A \text{ est triangulaire supérieure t.q.} \\ \mathcal{M}\{A_{ii}\} \neq 0 \text{ pour } i = 1, \cdots, n \end{cases}$$

Lemme 3.6 *Soit $A \in AP^0(\mathbb{M}(n,\mathbb{R}))$ qui satisfait $(\mathbf{A4})$ et $b \in AP^0(\mathbb{R}^n)$. Alors (3.34) possède une unique solution x_b dans $AP^0(\mathbb{R}^n)$. De plus il existe $\alpha \in]0,\infty[$ telle que, pour toute $b \in AP^0(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$,*

$$\|x\|_\infty \leq \alpha \|b\|_\infty.$$

Démonstration. L' équation (3.34) peut s'écrire sous la forme

$$\left.\begin{array}{lll} x_1'(t) = A_{11}(t)x_1(t)+ & A_{12}(t)x_2(t) + \cdots + A_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = & A_{22}(t)x_2(t) + \cdots + A_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \cdots & \cdots \\ x_n'(t) = & \qquad\qquad\qquad A_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{array}\right\} \tag{3.35}$$

où $x = (x_1, \cdots, x_n)$ and $b = (b_1, \cdots, b_n)$.

Comme $\mathcal{M}\{A_{nn}\} \neq 0$ alors en utilisant le Lemme 3.5, on déduit que la dernière équation scalaire de (3.35)

$$x_n'(t) = A_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \tag{3.36}$$

a une unique solution $\hat{x}_n \in AP^0(\mathbb{R})$ telle que

$$\|\hat{x}_n\|_\infty \leq \alpha_n \|b_n\|_\infty \tag{3.37}$$

où α_n est une constante positive indépendante de b_n.

La $(n-1)$-ième équation du système (3.35) est

$$x_{n-1}'(t) = A_{n-1,n-1}(t)x_{n-1}(t) + d_{n-1}(t), \tag{3.38}$$

où

$$d_{n-1}(t) = A_{n-1,n}(t)x_n(t) + b_{n-1}(t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il est clair que $d_{n-1} \in AP^0(\mathbb{R})$ comme somme et produit de fonctions p.p. : $A_{n-1,n}$, x_n et b_{n-1}. En utilisant toujours le Lemme 3.5 et le fait que $\mathcal{M}\{A_{n-1,n-1}\} \neq 0$, on conclut que l'équation (3.38) a une unique solution $\hat{x}_{n-1} \in AP^0(\mathbb{R})$ et il existe $\alpha_{n-1} \in]0,\infty[$, indépendante de d_{n-1}, tel que

$$\|\hat{x}_{n-1}\|_\infty \leq \alpha_{n-1}\|d_{n-1}\|_\infty. \tag{3.39}$$

Ainsi en utilisant le même raisonnement que précédemment, on peut prouver par récurrence que, pour $k = 1, \cdots, n$, la k-ième équation de (3.35) a une unique solution $\hat{x}_k \in AP^0(\mathbb{R})$ et il existe $\alpha_k \in]0,\infty[$, indépendante de d_k, tel que

$$\|\hat{x}_k\|_\infty \leq \alpha_k \|d_k\|_\infty, \tag{3.40}$$

où

$$d_k(t) = A_{k,k+1}(t)x_{k+1}(t) + \cdots + A_{k,n}(t)x_n(t) + b_k(t),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Il en découle que (3.35) a une unique solution $\hat{x} \in AP^0(\mathbb{R}^n)$.

Maintenant on va prouver qu'il existe $\alpha \in]0,\infty[$, indépendante de b, tel que

$$\|\hat{x}\|_\infty \leq \alpha \|b\|_\infty, \tag{3.41}$$

Puisque sur $BC^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ la norme $\|.\|_\infty$ est équivalente à la norme $\|.\|_0$, où

$$\|x\|_0 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_\infty$$

et

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_2 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j(t)|^2},$$

avec $x = (x_1, \cdots, x_n)$, il suffit de prouver (3.41) pour $\|.\|_0$. Pour cela on procède par récurence sur l'ordre $k \in \{1, \cdots, n\}$ de A.

<u>Première étape</u> : $k = 1$. Alors (3.35) est l'équation scalaire (3.36), et par (3.37), (3.41) est obtenue.

<u>Seconde étape</u> : $k = n-1$. On suppose qu'il existe $\gamma_{n-1} \in]0,\infty[$ tel que

$$\|\hat{x}_n\|_\infty + \cdots + \|\hat{x}_2\|_\infty \leq \gamma_{n-1}(\|b_n\|_\infty + \cdots + \|b_2\|_\infty). \tag{3.42}$$

<u>Troisième étape</u> : $k = n$. Par (3.42) on obtient

$$\|\hat{x}_n\|_\infty + \cdots + \|\hat{x}_1\|_\infty \leq \gamma_{n-1}(\|b_n\|_\infty + \cdots + \|b_2\|_\infty) + \|\hat{x}_1\|_\infty,$$

et par (3.40) on sait que :

$$\|\hat{x}_1\|_\infty \leq \alpha_1 \|d_1\|_\infty,$$

où

$$d_1(t) = A_{12}(t)x_2(t) + \cdots + A_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui implique

$$\begin{aligned}
\|\hat{x}_1\|_\infty &\leq \alpha_1(\|A_{12}\|_\infty\|\hat{x}_2\|_\infty + \cdots + \|A_{1n}\|_\infty\|\hat{x}_n\|_\infty + \|b_1\|_\infty) \\
&\leq \alpha_1 \left(\max(\|A_{12}\|_\infty, \cdots, \|A_{1n}\|_\infty)(\|\hat{x}_2\|_\infty + \cdots + \|\hat{x}_n\|_\infty)\right) \\
&+ \alpha_1\|b_1\|_\infty.
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence et en notant

$$c_n = \max(\|A_{12}\|_\infty, \cdots, \|A_{1n}\|_\infty),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\|\hat{x}_1\|_\infty &\leq \alpha_1(c_n\gamma_{n-1}(\|b_2\|_\infty + \cdots + \|b_n\|_\infty) + \|b_1\|_\infty) \\
&\leq \alpha_1 k_n(\|b_2\|_\infty + \cdots + \|b_n\|_\infty + \|b_1\|_\infty) \\
&\leq M_n(\|b_1\|_\infty + \cdots + \|b_n\|_\infty)
\end{aligned}$$

où $k_n = \max\{c_n\gamma_{n-1}, 1\}$ et $M_n = \alpha_1 k_n$.

Donc on conclut que :

$$\begin{aligned}\|\hat{x}_1\|_\infty + \cdots + \|\hat{x}_n\|_\infty &\leq \gamma_{n-1}(\|b_2\|_\infty + \cdots + \|b_n\|_\infty)\\ &\quad + M_n(\|b_1\|_\infty + \cdots + \|b_n\|_\infty)\\ &\leq \gamma_n(\|b_1\|_\infty + \cdots + \|b_n\|_\infty),\end{aligned}$$

avec $\gamma_n = \max\{\gamma_{n-1}, M_n\} \in]0, \infty[$, et ainsi :

$$\|\hat{x}\|_0 \leq \gamma_n \|b\|_0.$$

Et par suite, (3.41) est prouvée. □

Définition 3.1 *On appelle constante de Bohr-Neugebauer la plus petite constante α qui satisfait la dernière assertion du Lemme 3.6.*

Maintenant soit $A \in AP^0(\mathbb{M}(n, \mathbb{R}))$. On définit les deux matrices $T = (T_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $R = (R_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ comme suit, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$T_{ij}(t) = \begin{cases} A_{ij}(t) & \text{si } j \geq i \\ 0 & sinon \end{cases} \quad \text{et} \quad R(t) = A(t) - T(t). \tag{3.43}$$

On remarque que $T(t)$ est triangulaire supérieure.

Théorème 3.6 *Soit $A \in AP^0(\mathbb{M}(n, \mathbb{R}))$ telle que $\mathcal{M}\{A_{ii}\} \neq 0$ pour $i = 1, \cdots, n$ et soit $f \in APU(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. On suppose aussi que les conditions suivantes sont remplies :*

$$\|R\|_\infty < \frac{1}{\|T\|_\infty \alpha + 1 + \alpha}, \tag{3.44}$$

et pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\left.\begin{array}{l} \textit{il existe } k \in]0, (\|T\|_\infty \alpha + 1 + \alpha)^{-1} - \|R\|_\infty[\\ \textit{telle que } \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k\|x - y\|, \end{array}\right\}. \tag{3.45}$$

où T et R sont définies comme dans (3.43). Alors l'équation

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t)) \tag{3.46}$$

possède une unique solution dans $AP^1(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Tout d'abord on remarque qu'on peut écrire (3.46) comme suit

$$x'(t) = T(t)x(t) + g(t, x(t)) \tag{3.47}$$

où $g(t, x(t)) = R(t)x(t) + f(t, x(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Ensuite on considère l'opérateur linéaire $L : AP^1(\mathbb{R}^n) \to AP^0(\mathbb{R}^n)$ défini par $Lx = [t \mapsto x'(t) - T(t)x(t)]$. Puisque $\mathcal{M}\{A_{ii}\} \neq 0$ pour

$i = 1, \cdots, n$, alors T satisfait l'hypothèse du Lemme 3.6 et on en déduit que, pour $b \in AP^0(\mathbb{R}^n)$, il existe une unique solution de l'équation différentielle

$$x'(t) = T(t)x(t) + b(t). \tag{3.48}$$

Alors L est inversible, et on note par $x[b]$ l'unique solution de (3.48), ainsi on obtient $L^{-1}(b) = x[b]$. Par le Lemme 3.6, il existe $\alpha \in]0, \infty[$, indépendante de b, telle que

$$\|x[b]\|_\infty \le \alpha \|b\|_\infty,$$

et utilisant (3.48), on obtient

$$\begin{aligned}\|x'[b]\|_\infty &\le \|T\|_\infty \|x[b]\|_\infty + \|b\|_\infty \\ &\le \|T\|_\infty \alpha \|b\|_\infty + \|b\|_\infty \\ &= (\|T\|_\infty \alpha + 1)\|b\|_\infty.\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\|L^{-1}(b)\|_{C^1} \le (\|T\|_\infty \alpha + 1 + \alpha)\|b\|_\infty.$$

Par conséquent, on a

$$\|L^{-1}\|_{\mathcal{L}} \le (\|T\|_\infty \alpha + 1 + \alpha). \tag{3.49}$$

Maintenant on considère l'opérateur de superposition défini comme suit :

$$N_g : AP^0(\mathbb{R}^n) \to AP^0(\mathbb{R}^n), \quad N_g(x) = [t \mapsto g(t, x(t))].$$

N_g est bien défini d'après la Proposition 4.
De (3.45), il découle l'inégalité suivante :

$$\|N_g(x) - N_g(y)\|_\infty \le (\|R\|_\infty + k)\|x - y\|_\infty, \tag{3.50}$$

pour tous $x, y \in AP^0(\mathbb{R}^n)$.

Maintenant, par (2.42) et (3.50), on vérifie que pour $x, y \in AP^0(\mathbb{R}^n)$,

$$\|L^{-1} \circ N_g(x) - L^{-1} \circ N_g(y)\|_\infty \le k_1 \|x - y\|_\infty,$$

où $k_1 = (\|T\|_\infty \alpha + 1 + \alpha)(\|R\|_\infty + k)$.

D'autre part en utilisant (3.44) et (3.45), on voit que $k_1 \in]0, 1[$ et donc l'opérateur $L^{-1} \circ N_g : AP^0(\mathbb{R}^n) \to AP^0(\mathbb{R}^n)$ est une contraction. Alors en appliquant le Théorème de Point Fixe de Picard-Banach, on conclut qu'il existe un unique $x \in AP^0(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$L^{-1} \circ N_g(x) = x.$$

Ce qui est équivalent à dire que x une solution de (3.47) dans $AP^1(\mathbb{R}^n)$ et ainsi x est l'unique solution de (3.46) dans $AP^1(\mathbb{R}^n)$. □

3.6 Un résultat de dépendance continue

Théorème 3.7 *Soit $A = (A_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in AP^0(\mathbb{M}(n,\mathbb{R}))$ telle que $\mathcal{M}\{A_{ii}\} \neq 0$ pour $i = 1, ..., n$, et $f \in APU(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$ qui satisfait la condition suivante : pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour $(x, y, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$,*

$$\left.\begin{array}{l} \text{il existe } c \in]0, (\|T\|_\infty\alpha + 1 + \alpha)^{-1}[\text{ t.q.} \\ \|f(t,x,u) - f(t,y,u)\| \leq c\|x - y\|, \end{array}\right\}. \tag{3.51}$$

où α est la constante de Bohr-Neugebauer, et T est défini comme précédemment. Alors, pour tout $u \in AP^0(\mathbb{R}^p)$, il existe une unique solution $\tilde{x}[u]$ de

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t), u(t)) \tag{3.52}$$

qui est dans $AP^1(\mathbb{R}^n)$. De plus l'application $u \mapsto \tilde{x}[u]$ est continue de $AP^0(\mathbb{R}^p)$ dans $AP^1(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Soit L l'opérateur défini dans la preuve du théorème précédent et N_f l'opérateur de superposition $N_f : AP^0(\mathbb{R}^n) \times AP^0(\mathbb{R}^n) \to AP^0(\mathbb{R}^n)$, défini par $N_f(x, u) = [t \mapsto f(t, x(t), u(t))]$. D'après la Proposition 4, N_f est bien défini et est continu. Ceci implique que l'application $u \mapsto \Phi(x, u)$ est continue sur $AP^0(\mathbb{R}^p)$ pour tout $x \in AP^0(\mathbb{R}^n)$, où $\Phi : AP^0(\mathbb{R}^n) \times AP^0(\mathbb{R}^p) \to AP^0(\mathbb{R}^n)$, $\Phi(x, u) = L^{-1} \circ N_f(x, u)$.

Maintenant de (3.51) il suit que

$$\|N_f(x, u) - N_f(y, u)\|_\infty \leq c\|x - y\|_\infty \tag{3.53}$$

pour tout $x, y \in AP^0(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $u \in AP^0(\mathbb{R}^p)$. Avec (3.49), ceci implique que

$$\|\Phi(x, u) - \Phi(y, u)\|_\infty \leq c(\|T\|_\infty\alpha + 1 + \alpha)\|x - y\|_\infty$$

pour tous $x, y \in AP^0(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $u \in AP^0(\mathbb{R}^p)$.

Ainsi on peut appliquer le Théorème de Points Fixes Paramètrés (Théoreme 2.5) pour conclure que l'équation (3.52) possède une unique solution $\tilde{x}[u] \in AP^1(\mathbb{R}^n)$ et l'application $u \mapsto \tilde{x}[u]$ est continue de $AP^0(\mathbb{R}^p)$ dans $AP^0(\mathbb{R}^n)$. □

Bibliographie

[1] J. Grifone, "Algèbre linéaire", Cepadues Éditions, Toulouse, 1990.

[2] Z. Lin, "The Floquet Theory for Quasi-Periodic Linear Systems", Applied Mathematics and Mechanics (Edition Anglaise), **3** (3), June 1982.

[3] Z. Lin, "Theory of linear systems", Annals of Differential Equations, **6** (2) (1990), 153-215.

[4] Z. Lin, & Y.X. Lin, "Linear Systems, Exponential Dichotomy, and Structure of Sets of Hyperbolic Points", World Scientific, Singapore, 2000.

[5] S. Zaidmann, "Almost periodic functions in absract spaces", Pitman, London, 1985.

[6] R. H. Cameron, " Linear differential equations with almost periodic coefficients ", Ann. Math. **37** (1) (1936), 29-42.

[7] A. M. Fink,"Almost Periodic Differential Equations", Lecture Notes in Mathematics 377, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[8] H. Bohr, "Almost-periodic functions", Chelsea, reprint (1947).

[9] S. Lang, "Algèbre linéaire 1", French Edition, InterEditions, Paris, 1976.

4 Un résultat sur les systèmes linéaires presque-périodiques

4.1 Introduction

Lorsque A est une fonction presque-périodique (au sens de Bohr) de $\mathbb{R}$ dans l'espace des matrices réelles de format $n \times n$, on considère l'équation différentielle homogène et non autonome suivante :

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n. \tag{4.1}$$

Et lorsque b est une fonction presque-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, on considère l'équation différentielle non homogène suivante :

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{4.2}$$

Le but de ce chapitre est d'établir le résultat suivant :

Théorème 4.1 *Si A est presque-périodique et si toutes les solutions de* (4.1) *sont presque-périodiques, alors il existe une fonction b presque-périodique telle que l'équation* (4.2) *ne possède aucune solution bornée. De plus pour tout $c \in]0, \infty[$ on peut choisir la fonction b telle que $\|b\|$ est constante et égale à c sur $\mathbb{R}$.*

Il est aussi important de voir la contraposée de ce dernier théorème qui est le résultat suivant :

Théorème 4.2 *Soit A presque-périodique. Si pour tout $b \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ il existe une solution bornée de* (4.2)*, alors il existe au moins une solution de l'équation* (4.1) *qui n'est pas presque-périodique.*

4.2 Notations et rappels

On note par $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles de format $n \times n$. La matrice transposée de $M \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ est notée par M^*. Et lorsque x, $y \in \mathbb{R}^n$, $(x|y)$ désigne le produit scalaire usuel de x et y.

Si $A \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{M}(n, \mathbb{R}))$, on appelle l'enveloppe de A, notée $\mathcal{H}(A)$, l'ensemble des $B \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{M}(n, \mathbb{R}))$ pour lesquelles il existe une suite réelle $(\tau_m)_m$ telle que

$$\lim_{m \to \infty} \|B - A(. + \tau_m)\|_\infty = 0$$

cf. (3) et (4)

Dans le livre de Cheban (1, Théorème 3.37, p.63), le résultat suivant, attribué à Muhamadiev (référence [121] dans (1)), est prouvé.

Théorème 4.3 *Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Pour tout $b \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, l'équation* (4.2) *possède une unique solution presque-périodique.*

(ii) *Pour tout $B \in \mathcal{H}(A)$, l'équation $y'(t) = B(t)y(t)$ ne possède aucune solution bornée.*

Notant que notre Théorème 4.2 n'est pas un simple corollaire du Théorème 4.3 puisque l'hypothèse dans le Théorème 4.1 implique la négation de (ii), et par conséquent, la négation de (i), et donc il existe $b \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ pour lequel (4.2) ne possède aucune solution presque-périodique ou en possède plusieurs.

L'équation adjointe de (4.1) est la suivante :

$$x'(t) = -A^*(t)x(t) \tag{4.3}$$

Les deux résultats qui suivent concernent les solutions p.p. et bornées de ce type d'équations. Ils sont récents, ce qui témoigne de l'interêt existant pour ces équations. On peut consulter aussi (5).

Dans le papier de Tarallo (6, Théorème 1.1, p. 2303) on trouve le résultat suivant :

Théorème 4.4 *Si toutes les solutions non triviales x de* (4.1) *sont bornées et satisfont $inf_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\| > 0$, alors pour tout $b \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *l'équation* (4.2) *possède des solutions presque-périodiques.*

(ii) *Pour toute solution bornée v de* (4.3)*, $t \mapsto \int_0^t (b(s)|v(s))\, ds$ est bornée.*

Dans le papier de Cieutat et Haraux (2), on trouve le résultat suivant :

Théorème 4.5 *Soit $A \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{M}(n, \mathbb{R}))$ telle que $A(t)$ est symétrique et définie positive pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit $b \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *L'équation* (4.2) *possède au moins une solution presque-périodique.*

(ii) *Pour tout* $c \in \cap_{t\in\mathbb{R}} Ker A(t)$, $t \mapsto \int_0^t (b(s)|c)\, ds \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

4.3 Démonstration du théorème 4.1

Dans la preuve du Thérème 4.1, on va utiliser le résultat suivant :

Lemme 4.1 *Soit* $a \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *telle que toute les solutions de l'équation*

$$x'(t) = a(t)x(t) \tag{4.4}$$

sont presque-périodiques . Alors pour tout $c \in \mathbb{R}^*$, *l'équation*

$$x'(t) = a(t)x(t) + c \tag{4.5}$$

ne possède aucune solution bornée.

Démonstration. On suppose par l'absurde qu'il existe $c \in \mathbb{R}^*$ tel que (4.5) ait une solution bornée. Cette solution s'écrit sous la forme suivante

$$x(t) = \exp\left(\int_0^t a(r)\, dr\right) x(0) + c \int_0^t \exp\left(\int_s^t a(r)\, dr\right) ds.$$

En choisissant $x(0) = 0$, la fonction définie par

$$\phi(t) = \int_0^t \exp\left(\int_s^t a(r)\, dr\right) ds = \frac{x(t)}{c}$$

est bornée. De plus,

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \int_0^t \exp\left(\int_0^t a(r)\, dr\right) \exp\left(-\int_0^s a(r)\, dr\right) ds \\ &= \exp\left(\int_0^t a(r)\, dr\right) \int_0^t \exp\left(-\int_0^s a(r)\, dr\right) ds.\end{aligned}$$

Ainsi, si on définit,

$$\psi(t) = \int_0^t \exp\left(-\int_0^s a(r)\, dr\right) ds, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

on obtient, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\psi(t) = \phi(t) \int_0^t \exp\left(-\int_0^t a(r)\, dr\right). \tag{4.6}$$

Maintenant, par le fait que que toute les solutions de (4.4) sont presque-périodiques, il suit que la solution de (4.4) définie par

$$u(t) = \exp\left(\int_0^t a(r)\, dr\right) u(0)$$

est presque-périodique. Donc si on choisit $u(0) \neq 0$, on déduit par le Théorème 3.2 que

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\| > 0$$

et en utilisant le Théorème 3.1 on obtient

$$t \mapsto \exp\left(-\int_0^t a(r)\,dr\right) \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{R}). \tag{4.7}$$

En utilisant (4.6), (4.7) et le fait que ϕ est bornée, on conclut que ψ est bornée sur $\mathbb{R}$. Et par suite

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\psi(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \exp\left(-\int_0^s a(r)\,dr\right)\,ds = 0$$

ou encore

$$\mathcal{M}_t\left\{\exp\left(-\int_0^t a(r)\,dr\right)\right\} = 0. \tag{4.8}$$

D'autre part, par (4.7), on conclut que la fonction $t \mapsto -\int_0^t a(r)\,dr$ est presque-périodique, donc elle est bornée. Par conséquent, $\exists\beta \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $-\int_0^t a(r)\,dr \geq \beta$ donc $\frac{1}{t}\int_0^t \exp\left(-\int_0^s a(r)\,dr\right)\,ds \geq \exp(\beta) > 0$. Ceci entraîne que

$$\mathcal{M}_t\left\{\exp\left(-\int_0^t a(r)\,dr\right)\right\} > 0. \tag{4.9}$$

Ainsi, (4.8) et (4.9) fournissent la contradiction cherchée. □

Démonstration. (du Théorème 4.1) En utilisant le Théorème 3.4, on déduit qu'il existe $Q \in AP^1(\mathbb{R},\mathbb{M}(n,\mathbb{R});M)$ orthogonale et $B \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{M}(n,\mathbb{R});M)$ triangulaire supérieure telles que sous la transformation $y(t) = Q^{-1}(t)x(t)$, l'équation (4.2) est équivalente à

$$y'(t) = B(t)y(t) + e(t) \tag{4.10}$$

où $e(t) = Q(t)b(t)$, pour tout $t \in AP^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.
De plus, toutes les solutions de

$$y'(t) = B(t)y(t) \tag{4.11}$$

sont presque-périodiques.

Ainsi par le Lemme 4.1, il suit qu'il existe $c \in \mathbb{R}^*$ tel que l'équation

$$y'(t) = B(t)y(t) + c \tag{4.12}$$

n'a aucune solution bornée. En effet, (4.12) s'écrit sous la forme

$$\left.\begin{array}{lll} y_1'(t) = b_{11}(t)y_1(t) + & b_{12}(t)y_2(t) + \cdots + b_{1n}(t)y_n(t) + c_1 \\ y_2'(t) = & b_{22}(t)y_2(t) + \cdots + b_{2n}(t)y_n(t) + c_2 \\ \cdots & \cdots \\ y_n'(t) = & \qquad\qquad b_{nn}(t)y_n(t) + c_n \end{array}\right\}$$

où $y = (y_1, \cdots, y_n)$ and $c = (c_1, \cdots, c_n)$.

Puisque toutes les solutions de (4.11) sont presque-périodiques, il est de même pour les solutions de $y_n'(t) = b_{nn}(t)y_n(t)$. Et en appliquant le Lemme 4.1, on conclut de l'équation $y_n'(t) = b_{nn}(t)y_n(t) + c_n$ ne possède aucune solution bornée. Ceci implique que (4.12) n'a aucune solution bornée puisque la dernière coordonnée n'est jamais bornée.
Comme $x(t) = Q(t)y(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, et Q est orthogonale, on obtient

$$\|x(t)\| = \|Q(t)y(t)\| = \|y(t)\|.$$

Finalement, x est non bornée. Ceci achève la démonstration du théorème.

$\square$

Bibliographie

[1] D. Cheban, "Asymptotically almost periodic solutions of almost periodic solutions for some linear forced differential equations", Hindawi Publishing Corporation, New York, N. Y., 2009.

[2] P. Cieutat and A. Haraux, "Exponential decay and existence of almost periodic solutions for some linear forced differential equations", Port. Math. **59**(2) 2002, 141-159.

[3] C. Corduneanu, "Almost periodic functions and waves", Springer Science+Business Media, LLC, NY. 2009.

[4] A. M. Fink, "Almost Periodic Differential Equations", Lecture Notes in Mathematics 377, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[5] R. Ortega and M. Tarallo, "Almost periodic linear differentials equations with non separated solutions", Journal of Functional Analysis, **237** 2006, 402-426.

[6] M. Tarallo, "Fredholm alternative for a class of almost periodic linear systems", Discrete and Continuous Dynamical Systems, **32**(6) 2012, 2301-2313.

Conclusion générale

Au cours de ce mémoire, nous avons étudier

1. **La réductibilité d'un système différentiel linéaire quasi-périodique en un système différentiel linéaire autonome via la théorie de Floquet-Lin pour établir des résultats d'existence et d'unicité et de dépendance continue des systèmes différentiels non linéaires quasi-périodiques.**
2. **La réductibilité d'un système différentiel linéaire presque-périodique en un système différentiel linéaire triangulaire supérieur avec conservation du nombre des solutions presque-périodiques indépendantes. Ensuite, un résultat d'existence et d'unicité et de dépendance continue des systèmes différentiels non linéaires presque-périodiques.**
3. **Soit** A **est presque-périodique. Si pour tout** $b \in AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ **il existe une solution bornée de** $x'(t) = A(t)x(t)$, **alors il existe au moins une solution de l'équation** $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ **qui n'est pas presque-périodique.**

Notations

$\mathbb{N}, \mathbb{N}^*$	ensemble des entiers naturels, des entiers strictement positifs.
$\mathbb{R}$	ensembles des réels.
$\mathbb{R}^n$	ensemble des vecteurs réels à n dimensions
$C^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$	espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$.
$BC(\mathbb{R}, \mathbb{E})$	espace des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{E}$.
$C^k(\mathbb{R}, \mathbb{E})$	espace des fonctions k fois continuement dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$.
$AP^0(\mathbb{R}, \mathbb{E}) = AP^0(\mathbb{E})$	espace des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$.
$AP^k(\mathbb{R}, \mathbb{E}) = AP^k(\mathbb{E})$	espace des fonctions C^k qui sont presque-périodiques jusqu'à l'ordre k.
$APU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$	espace des fonctions presque-périodiques uniformément, par rapport à un paramètre.
$QP^0_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{E})$	espace des fonctions quasi-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$, dont le module de fréquences est engendré par les composantes de ω.
$QP^k_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{E})$	espace des fonctions C^k qui sont quasi-périodiques jusqu'à l'ordre k, et de vecteur des fréquences ω.
$QPU_\omega(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$	espace des fonctions quasi-périodiques uniformément, par rapport à un paramètre et de vecteur des fréquences ω.
$M(n, \mathbb{R})$	espace des matrices réelles d'ordre n.
$GL(n, \mathbb{R})$	groupe linéaire général des matrices réelles invercibles d'ordre n.

$W^{k,2}(\mathbb{E},\mathbb{F})$	espace de Sobolev.
$\mathbb{T}^N$	tore de dimension N.
$a(f,\lambda)$	le λ-ème coefficient de Fourier-Bohr de f.
$\mathrm{Mod}(\varphi)$	$\mathbb{Z}$-module engendré par $\Lambda(\varphi)$ dans $\mathbb{R}$.
$\mathcal{M}\{f\}$	moyenne temporelle de f
τ_a	opérateur de translation par a, ($a \in \mathbb{R}$).
$\Lambda(f)$ ($f \in AP^0(\mathbb{E})$)	ensemble des fréquences de f.

Ce document a été préparé à l'aide de l'éditeur de texte GNU Emacs et du logiciel de composition typographique $\LaTeX\,2_\varepsilon$.

Titre Réductibilité et Théorie de Floquet pour des Systèmes Différentiels non Linéaires

Résumé L'objet de cette thèse est d'étuidier, dans un premier temps, la réductibilité d'un système différentiel linéaire quasi-périodique en un système différentiel linéaire autonome via la théorie de Floquet-Lin pour établir des résultats d'existence et d'unicité et de dépendance continue des systèmes différentiels non linéaires quasi-périodiques. Et dans second temps on établit un résultat de réductibilité d'un système différentiel linéaire presque-périodique en un système différentiel linéaire triangulaire supérieur avec conservation du nombre des solutions presque-périodiques indépendantes. Ensuite, un résultat d'existence et d'unicité et de dépendance continue des systèmes différentiels non linéaires presque-périodiques.

Mots-clés Fonctions quasi-périodiques, fonctions presque-périodiques, théorie de Floquet, réductibilité, EDO non linéaire

Title Reducibility and Floquet Theory for Nonlinear Differentials Systems

Abstract We use a Floquet theory for quasi-periodic linear ordinary differential equations due to Zhensheng Lin to obtain results, of existence, unicity, continuous and differentiable dependence, on the quasi-periodic solutions of quasi-periodic nonlinear ordinary differential equations. in a second time we establish the reducibility of linear systems of almost periodic differential equations into upper triangular systems of a. p. differential equations. This is done while the number of independent a. p. solutions is conserved. We prove existence and uniqueness of a. p. solutions of a nonlinear system with an a. p. linear part. Also we prove the continuous dependence of a. p. solutions of a nonlinear system with respect to an a. p. control term.

Keywords Quasi-periodic functions, almost-periodic functions, Floquet theory, reducibility, EDO nonlinear